JACOBI BERNOULLI,

Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.

MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS

DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè scripta

DE LUDO PILÆ RETICULARIS.

FESTINA LENTE

BASILEÆ,

Impensis THURNISIORUM, Fratrum.

cIↃ IↃcc XIII.

LETTRE
à un Amy,
ſur
les Parties du Jeu de Paume.

VOus me marquez, Monſieur, que vous avez vû une de mes Theſes, où j'avance quelques Propoſitions nouvelles, touchant les Parties du Jeu de Paume; & vous me demandez, ſi ces Propoſitions renferment quelque realité qui puiſſe être démontrée, ou ſi elles ne ſont fondées que ſur de pures conjectures faites en l'air, & qui n'ont rien de ſolide; ne pouvant pas concevoir, à ce que vous dites, que l'on puiſſe meſurer les forces des joueürs par nombres, & encore moins en tirer toutes les concluſions, que j'en ay tirées. Ce qui m'oblige de mettre par écrit tout ce que j'ay medité ſur cette matiere, & d'en faire le ſujet de cette Lettre, que je vous écris en François, pour ne vous pas rebuter dans ſa lecture par la traduction des termes qui ſont en uſage parmy les joueürs, & qui deviendroient peu intelligibles, ſi on les mettoit en une autre Langue. Je ne m'arrête pas à vous y expliquer les Regles du Jeu, ni le principe de l'Art de conjecturer, qui doit ſervir de fondement à nôtre recherche, ſachant que l'un & l'autre

vous ſont parfaitement connus. Mais au reſte j'entre dans le détail de toutes les particularités de mon ſujet, ſans craindre le reproche, que l'on me pourroit faire de vous entretenir trop ſur une bagatelle; car vous ſavez, que ce noble Jeu a toujours fait le divertiſſement des perſonnes de la premiere qualité, & bientôt vous verrez, que s'il eſt utile pour l'exercice du corps, il eſt tres-capable & tres-digne auſſi de fixer les meditations de l'eſprit.

Je vous feray remarquer avant toutes choſes, que la raiſon, pour laquelle dans les jeux de hazard on peut ſupputer exactement les avantages & les deſavantages des Joueürs, c'eſt parce que le plus ſouvant l'on connoit au juſte le nombre des cas, qui leur ſont favorables ou contraires: & je dois vous dire, qu'il n'en eſt pas de même des jeux, qui dépendent uniquement, ou en partie, du genie, de l'induſtrie ou de l'adreſſe des joueürs, tels que ſont les jeux de la paume, des échecs, & la pluspart des jeux de cartes; étant bien viſible, que l'on ne ſauroit déterminer par les cauſes, ou *à priori*, comme l'on parle, de combien un homme eſt plus ſavant, plus adroit ou plus habile qu'un autre, ſans avoir une parfaite connoiſſance de la nature de l'ame, & de la diſpoſition des organes du corps humain, laquelle mille cauſes occultes, qui y concourent, rendent abſolument impoſſible. Mais cela n'empêche pas, qu'on ne puiſſe le ſçavoir preſque auſſi certainement, *à poſteriori*, par l'obſervation de l'événement pluſieurs fois reïterée, en faiſant ce qui ſe peut pratiquer dans les jeux même de pur hazard, lors qu'on ne ſçait pas le nombre des cas, qui peuvent arriver. Poſons, qu'il y ait dans un ſac quantité de billets en partie blancs & en partie noirs, & que je ne ſache pas le nombre des uns ni des autres; que ferois-je pour le découvrir? je les tirerois l'un aprés l'autre, (en remettant chaque fois dans le ſac le billet, que j'en aurois tiré, avant que de prendre le ſuivant, afin que le nombre des billets du ſac ne diminüât point) & ſi j'obſervois cent fois que j'en tiraſſe un noir, & deux cent fois, que j'en tiraſſe un blanc, je ne héſiterois pas à conclure, que le nombre des blancs ne fût environ le double de celuy des noirs; car il eſt tres-ſur, que plus je ferois de ces obſervations en tirant, plus je pourrois eſpérer d'approcher de la veritable raiſon, qui ſe trouve

entre

entre les nombres des ces deux sortes de billets; étant même une chose démontrée, qu'on en peut tant faire, qu'il sera à la fin probable de toute probabilité donnée, & par conséquent qu'il sera moralement certain, que la raison d'entre ces nombres, que l'on aura ainsi trouvée par expérience, difére de la veritable d'aussi peu que l'on voudra: qui est tout ce qu'on peut souhaiter, C'est aussi de cette maniere, que dans les jeux d'art & d'adresse on peut connoître de combien un jouëur est plus fort que l'autre jouëur. Je vois par exemple deux hommes, qui jouënt à la paume: je les observe long temps, & je remarque, que l'un d'eux gagne 200 ou 300 coups, pendant que l'autre n'en gagne que cent: je juge par là, avec assez de certitude, que le premier est deux ou trois fois meilleur jouëur que l'autre, ayant pour ainsi dire deux ou trois parties d'adresse, comme autant de cas ou de causes qui luy font gagner la bale, là où l'autre n'en a qu'une.

I. Cecy étant compris, mettons, pour entrer en matiere, deux jouëurs égaux A & B (c'est à dire, à qui nous ayons vû gagner & perdre un pareil nombre de coups) qui soient prémiérement à deux, ou trentains, ou quinzains, ou à but. Il est évident, qu'ils ont tous deux une égale esperance de faire les coups qui leur manquent, & de gagner ainsi le jeu; c'est pourquoy le sort de chacun est estimé $\frac{1}{2}$ J ou $\frac{1}{2}$ Jeu. Mettons ensuite, qu'A ait 30 & B 45, ou (ce qui revient à un) que celuy-cy ait l'avantage: vous voyez, qu'il est bien autant probable, qu'A gagnera ou perdra le coup suivant; mais s'il le gagne, ils redeviendront à deux & chacun aura, comme j'ay dit, $\frac{1}{2}$ J; & s'il le perd, il perdra aussi le jeu; c'est ce qui luy vaut, par la Doctrine que vous sçavez, $\frac{1.^{1:2} + 1.^{0}}{2} \infty \frac{1}{4}$J. Mettons encore, que A ait 15 à 45; il est clair aussi, qu'il luy est également possible, de gagner 30 à 45, & d'avoir ainsi le sort précédent $\frac{1}{4}$ J, ou de perdre le jeu (selon qu'il gagne ou perd le prémier coup) c'est-ce qui rend maintenant son sort $\frac{1.^{1:4} + 1.^{0}}{2} \infty \frac{1}{8}$ J. Que si A avoit 15 à 30, un cas le rendroit trentain & un autre 15 à 45, (dont celuy-là luy amene $\frac{1}{2}$ J, & celuy-cy $\frac{1}{8}$ J) ce qui luy vaudroit alors $\frac{1.^{1:2} + 1.^{1:8}}{2}$

$\infty \frac{5}{16}$

Table I.

Points de		Sort de
A	B	A
45	45	$\frac{1}{2}$J.
30	45	$\frac{1}{4}$J.
15	45	$\frac{1}{8}$J.
0	45	$\frac{1}{16}$J.
30	30	$\frac{1}{2}$J.
15	30	$\frac{5}{16}$J.
0	30	$\frac{3}{16}$J.
15	15	$\frac{1}{2}$J.
0	15	$\frac{11}{32}$J.
0	0	$\frac{1}{2}$J.

Table II.

Jeux de		Sort de
A	B	A
3	3	$\frac{1}{2}$P.
2	3	$\frac{1}{4}$P.
1	3	$\frac{1}{8}$P.
0	3	$\frac{1}{16}$P.
2	2	$\frac{1}{2}$P.
1	2	$\frac{5}{16}$P.
0	2	$\frac{3}{16}$P.
1	1	$\frac{1}{2}$P.
0	1	$\frac{11}{32}$P.
0	0	$\frac{1}{2}$P.

∞ $\frac{5}{16}$ J. L'on trouvera tout de même les ſorts d'A pour les autres hipotêſes, comme ils ſont marqués dans cette Table. Pour ceux de B, ils ſont aisés à ſuppléer, étant toûjours les reſtes de ceux d'A à l'unité.

II. De même ſi les deux joueürs ſont à deux de jeu, il eſt manifeſte, que chacun d'eux peut également eſpérer de gagner la Partie, en faiſant deux jeux de ſuite ; & que par conſéquent le ſort de chacun eſt $\frac{1}{2}$ P ou $\frac{1}{2}$ Partie. Mais ſi (la Partie ſe faiſant par exemple à quatre jeux) A en avoit gagné 2, & B 3, ou (ce qui eſt le même) si B avoit l'avantage du jeu, il y auroit autant d'apparence, que le prémier jeu les rendit à deux de jeu, ou qu'il fit perdre la Partie à A (ſelon que celuy-cy gagneroit ou perdroit ce jeu) ce qui luy feroit avoir $\frac{1 \cdot 1:2 + 1 \cdot 0}{2}$ ∞ $\frac{1}{4}$ P. L'on conclud de même, que ſi A avoit un jeu, & B trois, le ſort d'A ſeroit $\frac{1}{8}$ P. Et ainsi du reſte, comme vous voyez dans cette autre Table, qui comprend les ſorts d'A par rapport à toute la Partie. Vous jugez, qu'elle doit être la même que la prémiére ; car ce que les 4 coups d'un jeu ſont à l'égard de ce jeu, les 4 jeux le ſont à l'égard de toute la Partie.

III. Conſidérons encore les deux joueürs, comme étant à deux de jeu, & donnons en outre à A 30 & à B 45 : vous voyez que le prémier coup doit les mettre à deux, & ainsi égaler leur ſort, si A gagne le

Table III.

Jeux d'A	III. ou II.	II.	I.	O.	I.	O.	I.	O.	O.
Jeux de B	III. ou II.	III.	III.	III.	II.	II.	I.	I.	O.
Points de A. B.				Sorts de A:					
45.45	1: 2	1: 4	1: 8	1: 16	5: 16	3: 16	1: 2	11: 32	1: 2
30.45	3: 8	1: 8	1: 16	1: 32	7: 32	1: 8	13: 32	17: 64	27: 64
15.45	5:16	1:16	1: 32	1: 64	11: 64	3: 32	23: 64	29:128	49:128
0.45	9:32	1:32	1: 64	1:128	19:128	5: 64	42:128	53:256	93:256
45.30	5: 8	3: 8	3: 16	3: 32	13: 32	1: 4	19: 32	27: 64	37: 64
30.30	1: 2	1: 4	1: 8	1: 16	5: 16	3: 16	1: 2	11: 32	1: 2
15.30	13:32	5:32	5: 64	5:128	31:128	9: 64	55:128	73:256	113:256
0.30	11:32	3:32	3: 64	3:128	25:128	7: 64	49:128	63:256	103:256
45.15	11:16	7:16	7: 32	7: 64	29: 64	9: 32	41: 64	59:128	79:128
30.15	19:32	11:32	11: 64	11:128	49:128	15: 64	73:128	103:256	143:256
15.15	1: 2	1: 4	1: 8	1: 16	5: 16	3: 16	1: 2	11: 32	1: 2
0.15	27:64	11:64	11:128	11:256	65:256	19:128	113:256	151:512	231:512
45. 0	23:32	15:32	15: 64	15:128	61:128	19: 64	85:128	123:256	163:256
30. 0	21:32	13:32	13: 64	13:128	55:128	17: 64	79:128	113:256	153:256
15. 0	37:64	21:64	21:128	21:256	95:256	29:128	143:256	201:512	281:512
0. 0	1: 2	1: 4	1: 8	1: 16	5: 16	3: 16	1: 2	11: 32	1: 2

gne le coup; & s'il le perd, que B doit avoir l'avantage du jeu, auquel cas nous avons trouvé le ſort d'A $\frac{1}{4}$ P: c'eſt pourquoy l'eſpérance qu'il a de gagner la Partie eſt maintenant $\frac{1.^{1:2} + 1.^{1:4}}{2} \infty \frac{3}{8}$ P. Suppoſons enſuite, que A ait deux jeux (ou un jeu) & B trois, & qu'ils ſoient à deux, ou trentains, ou quinzains; il eſt viſible, que chacun pouvant également gagner le jeu, c'eſt tout comme s'ils n'avoient rien au de là de leurs jeux, de ſorte que le ſort d'A eſt encore, comme il a eté trouvé dans l'article précédent, $\frac{1}{4}$ P (ou $\frac{1}{8}$ P). Mais si A avoit 2 jeux à 3, & 30 à 45, il pourroit également acquerir 45, ou perdre la Partie avec le jeu (ſuivant qu'il gagneroit ou perdroit le prémier coup) ce qui luy vaudroit $\frac{1.^{1:4} + 1.^{0}}{2} \infty \frac{1}{8}$ P. Et si outre les 2 jeux à 3 il n'avoit que 15 à 45, le prémier coup luy pourroit également donner 30 à 45, ou luy faire perdre le jeu & la Partie; ce qui alors rendroit ſon ſort $\frac{1.^{1:8} + 1.^{0}}{2} \infty \frac{1}{16}$ P. &c. C'eſt de cette maniére, que j'ay calculé la troiſiéme Table, qui comprend les ſorts d'A pour tous les états poſſibles des deux joueürs, lors qu'outre les jeux entiers ils ont encore gagné quelques points. Elle eſt donc générale, & elle renferme auſſi dans les derniers chifres de ſes rangs perpendiculaires toute la deuxiéme Table. Si vous prenez la peine de l'examiner, vous y pourrez faire pluſieurs reflexions dignes de remarque. Vous verrez par ex. que 15 à 30, les joueürs étant à deux de jeu, valent tout juſte autant, que 30 à rien avec deux jeux à trois, ou 45 à 30 avec un jeu à deux, ou enfin 30 à 45 avec un jeu à un: qu'un jeu à deux avec 45 à 15 vaut tant ſoit peu mieux pour A, que s'ils étoient encore au comencement de la Partie, & que A n'eût rien & B 15, n'y ayant que $\frac{1}{512}$ de diférence entre les ſorts de ces deux hipotêſes. &c.

IV. Tachons préſentement de découvrir les ſorts de joueürs, quand ils ſont d'inégale force: Pour abreger le calcul, ſoit pris généralement n pour le nombre des coups, qu'on ait vû gagner au plus fort A, contre leſquels le plus foible B n'en ait gagné qu'un; de ſorte que

te que

te que n à 1 marque la raiſon des forces des deüx joüeurs; aprés quoy mettons, qu'ils ſoient à deux, & quil faille trouver leur ſort. Si un ſeul coup ſufiſoit à chacun d'eux pour gagner le jeu, la queſtion ſeroit déja decidée; puisque la raiſon de n à 1, qui eſt celle de leurs forces, ſeroit auſſi celle de leurs eſpérances pour ce jeu-là; mais parcé que les loix du jeu en ont ordonné autrement, & qu'elles demandent qu'on gagne deux coups de ſuite pour gagner le jeu, la raiſon qu'on cherche eſt différente de celle-là, & il faut un peu d'analyſe pour la trouver. Sachant donc, qu'aprés le prémier coup l'un doit avoir l'avantage, & qu'aprés le ſecond coup le jeu ſe peut remettre à deux, & qu'étant à deux il retourne le même ſort inconnu, que nous voulons chercher, apellons le ſort d'A en cet état x, & conſidérons ce qui arriveroit, ſi l'un ou l'autre gagnoit l'avantage. Or ſi A le gagne, qui eſt n fois plus habile joüeur que l'autre, il y aura pour luy n aparences de gagner le jeu, & une aparence de ſe remettre à deux (ſuivant qu'il gagnera auſſi ou perdra l'autre coup) ce qui luy vaut $\frac{n.^{1}+1.^{x}}{n+1} \infty \frac{n+x}{n+1}$: & si c'eſt B qui gagne l'avantage, il y aura pour A n vrayſemblances de ſe remettre à deux, & une vrayſemblance de perdre le jeu; ce qui luy fait $\frac{n.^{x}+1.^{0}}{n+1} \infty \frac{nx}{n+1}$. D'où il s'enſuit, que les joüeurs étant encore à deux, auquel cas il y a pour A par la même raiſon n fois plus de vrayſemblances de gagner l'avantage, que de le perdre, ſon ſort doit étre $\frac{n.^{n+x:n+1}+1.^{nx:n+1}}{n+1} \infty \frac{nn+2nx}{nn+2n+1}$, & parce que le même eſt apellé x, il y aura $x \infty \frac{nn+2nx}{nn+2n+1}$; ce qui nous donne $x \infty \frac{nn}{nn+1}$, & reſte pour le ſort de ſa Partie $\frac{1}{nn+1}$, tellement que leurs ſorts ſont entre eux en raiſon de nn à 1, doublée de celle de leurs forces n à 1. Cecy étant établi, l'on pourra continüer par ordre nôtre recherche pour toutes les autres hipotéſes, comme on a fait dans les articles precédens, pourvû qu'on ſe ſouvienne icy, qu'à chaque coup il eſt n fois plus probable, que A gagne ce coup, qu'il n'eſt probable, qu'il le perde: Poſé donc par exemple, qu'A ait 30

& B

Table IV.

Points de A	Points de B	Sorts de A.
45	45	$\frac{nn}{nn+1}$
30	45	$\frac{n^3}{n^3+nn+n+n+1}$
15	45	$\frac{n^4}{n^4+2n^3+2nn+2n+1}$
0	45	$\frac{n^5}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
45	30	$\frac{n^3+nn+n}{n^3+nn+n+1}$
30	30	$\frac{nn}{nn+1}$
15	30	$\frac{n^5+3n^4+n^3}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
0	30	$\frac{n^6+4n^5+n^4}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$
45	15	$\frac{n^4+2n^3+2nn+2n}{n^4+2n^3+2nn+2n+1}$
30	15	$\frac{n^5+3n^4+4n^3+3nn}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
15	15	$\frac{n^5+3n^4+4n^3}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
0	15	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$
45	0	$\frac{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
30	0	$\frac{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+6nn}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$
15	0	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+10n^3}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$
0	0	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$

& B 45; il y a n cas qui mettent le jeu à deux, & un cas qui le fait perdre à A; ce qui luy vaut $\frac{n.\,nn:nn+1\;+1.\,0}{n+1} \propto \frac{n^3}{n^3+nn+n+1}$. Posé qu'A ait 15 à 45, il y a n cas, qui luy font gagner 30 à 45 & encore un cas qui luy fait perdre le jeu; ce qui luy fait naître le sort $\frac{n.\,n^3:n^3+nn+n+1\;+1.\,0}{n+1} \propto \frac{n^4}{n^4+2n^3+2nn+2n+1}$. On trouve de la même maniére le sort d'A, quand il n'a rien & B 45. Lors qu'ils sont trentains, ils ont le même sort qu'étant à deux, parce qu'il leur faut aussi gagner deux coups de suite, pour faire le jeu. On trouvera de même leur sort, A ayant 15 ou 0, & B 30. Semblablement on cherche les sorts, A ayant 45, & B 30, 15 ou 0; comme aussi A ayant 30, & B 15 ou 0. Ainsi l'on ne peut ignorer les sorts, quand ils sont quinzains, ou A ayant 0 & B 15, ou au contraire A 15 & B 0, ou enfin quand ils sont encore à but. C'est ce qui produit la quatriéme Table, où est contenüe la valeur des espérances de A (par raport à chaque jeu) généralement pour toute sorte de raisons, qu'on puisse imaginer entre les forces des joueürs:

V. Vous jugez bien, que si vous y prenez n pour 1, il en doit resulter la prémiére Table, faite pour des joueürs d'égale force: & si vous faites valoir successivement cette lettre pour 2, 3, 4. &c. la Table servira pour des joueürs, dont l'un est deux, trois, ou quatre fois plus fort que l'autre. Si par exemple A est deux fois plus fort que B, vous trouverez son sort, étant à deux, $\frac{4}{5}$ J; & ayant 30 à 45 vous le trouverez $\frac{8}{15}$ J; de sorte qu'il restera pour celuy de B, $\frac{1}{5}$ J & $\frac{7}{15}$ J; & par conséquent les sorts des deux joueürs en ces cas seront entre eux en raison de 4 à 1, & de 8 à 7, & ainsi de tout le reste, comme il est représenté dans la cinquiéme Table.

Vous vous souviendrez pourtant de ce que j'ay dit, que ces Tables ne servent que pour chaque jeu séparément; car il en faudroit encore donner une semblable, qui comprit les sorts des joueürs par raport à toute la Partie, lors qu'ils jouënt à plusieurs jeux, dont ils ont déja gagné quelques uns, avec quelques points encore, si vous voulez; comme j'ay fait la troisiéme Table pour des joueürs égaux: mais parce que la continuation de cette recherche par lettres seroit

Table V.

Points de A	B	*Raisons de leurs forts, A étant plus fort que B,* 2 *fois*	3 *fois*	4 *fois*.
45	45	4 . 1	9 . 1	16 . 1
30	45	8 . 7	27 . 13	64 . 21
15	45	16 . 29	81 . 79	256 . 169
0	45	32 . 103	243 . 397	1024 . 1101
45	30	14 . 1	39 . 1	84 . 1
30	30	4 . 1	9 . 1	16 . 1
15	30	88 . 47	513 . 127	1856 . 269
0	30	208 . 197	891 . 389	8448 . 2177
45	15	44 . 1	159 . 1	424 . 1
30	15	124 . 11	621 . 19	2096 . 29
15	15	112 . 23	297 . 23	2048 . 77
0	15	176 . 67	891 . 133	49408 . 3717
45	0	134 . 1	639 . 1	2124 . 1
30	0	392 . 13	1269 . 11	10592 . 33
15	0	224 . 19	999 . 25	52608 . 517
0	0	208 . 35	243 . 13	51968 . 1157

tres-pénible, & demanderoit un calcul immenſe, je me contenteray de faire voir dans un exemple particulier, comment il s'y faudroit prendre, pour trouver en abregé ce qu'on cherche. Supoſons, que la Partie ſe face à 4 jeux: que A ait un jeu & outre cela 15, B deux jeux avec 45, & que A ſoit deux fois plus fort que B; on veut ſçavoir la valeur des eſpérances qu'ils ont de gagner la Partie. Remarquons avant toute choſe que les facilités, qu'ont ces joueurs à gagner chaque jeu étant encore à but, ſont entre elles par la cinquiéme Table en raiſon de 208 à 35, ou bien de $\frac{208}{35}$ à 1; & que par conſéquent celuy qui eſt deux fois plus fort qu'un autre, aura $\frac{208}{35}$ fois (c'eſt près de ſix fois) plus de facilité pour gagner ce jeu: enſuite de quoy conſidérons, que le jeux, dont ils ont déja fait une Partie, étant

étant achevé, ils auront ou deux jeux à deux, ou un jeu à trois (suivant que l'un ou l'autre l'aura gagné) en quelle situation il leur manquera encore ou deux jeux à chacun, ou trois jeux à A & un jeu à B. Or il est bien clair, que c'est alors tout comme s'il leur manquoit seulement autant de coups, qu'il leur manque de jeux (c'est à dire comme s'ils estoient trentains, ou 15 à 45) suposé que la facilité, que le plus fort a de gagner un jeu entier, fût celle, qu'il a de gagner un simple coup, & que nous avons nommée n. Mais cette facilité, comme je viens de dire, est exprimée par $\frac{208}{35}$; si vous substituez donc cette fraction numerique à la place de n dans les quantités $\frac{nn}{nn+1}$ & $\frac{n^4}{n^4+2n^3+2nn+2n+1}$, qui marquent, par la 4me Table, le sort de A quand il est trentain ou 15 à 45, vous aurez les sorts, qui luy tombent quand il a deux jeux à deux, ou un jeu à trois, qui seront ainsi $\frac{43264}{44489}$ P & $\frac{1871773696}{2627030961}$ P. Et par ce que l'on supose, que ce jouëur a 15 à 45 du jeu qu'on jouë présentement, auquel état il a 16 cas de gagner ce jeu, & 29 cas de le perdre, par la cinquiéme Table ; il s'ensuit, qu'il y a 16 cas qui luy acquiérent deux jeux à deux, & 29 cas, qui luy font avoir un jeu à trois, ce qui rend la valeur de son espérance à gagner la Partie,

$$\frac{16 \cdot \frac{43264}{44489} + 29 \cdot \frac{1871773696}{2627030961}}{45} \propto \frac{19031314432}{23643278649} \text{ P}$$

; & il reste pour celle de B, $\frac{4611964217}{23643278649}$ P; de sorte que ces espérances sont entre elles en raison de 19031314432 à 4611964217, qui est un peu plus que quadruple. Mais passons plus outre.

VI. Si le raport des forces de deux jouëurs est connu, l'on peut sçavoir, combien l'un doit donner d'avantage à l'autre pour rendre le jeu égal. On n'a qu'à jetter les jeux sur la cinquiéme Table, pour voir où les nombres, qui marquent le raport de leurs espérances, s'aprochent le plus. C'est ainsi que nous observons, que lorsque A est deux fois plus fort que B, leurs sorts différent le moins, A n'ayant rien & B 30; de sorte que A peut donner à B 30, & même avec quelque petit avantage pour soy, son espérance à gagner le jeu étant tant soit peu plus grande que celle de B. Si A est trois fois plus fort que B, & qu'il luy donne 45, nous voyons, qu'il y a un avantage notable pour B, mais qu'il y a beaucoup plus d'avanta-

 ge pour

ge pour luy même, s'il ne luy donne que 30. Pour rendre donc la Partie égale autant qu'il se peut, il faudroit qu'il donnât à B 45, prenant pour luy 15. Si A est quatre fois plus fort, il peut donner à B 45, pourtant avec quelque petit avantage pour B; mais s'il étoit cinq fois plus fort que B, il pourroit luy donner 45, & auroit encore un avantage assés considérable pour soy-même, puisque leurs sorts se trouveroient être comme 3125 & 2491 &c.

VII. Si A donne à B 15, ou 30, ou 45, sçavoir au contraire, de combien A est plus fort que B? Pour resoudre cette question il faut considérer, que lors que pour égaler la Partie A donne à B un avantage de quelques points, le sort de chacun doit être $\frac{1}{2}$; c'est pourquoi l'on prendra dans la Table IV les quantités, qui marquent le sort de A, lors qu'il n'a rien, & B 45, ou 30, ou 15, & on les fera chacune $\infty \frac{1}{2}$; ce qui nous fournit trois égalités:

$$\frac{n^5}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1} \infty \frac{1}{2},$$

$$\frac{n^6+4n^5+n^4}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1} \infty \frac{1}{2},$$

$$\& \quad \frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1} \infty \frac{1}{2},$$

lesquelles étant reduites seront

$$n^5-3n^4-4n^3-4nn-3n-1 \infty 0,$$
$$n^6+4n^5-5n^4-8n^3-7nn-4n-1 \infty 0,$$
$$n^7+5n^6+11n^5-5n^4-15n^3-11nn-5n-1 \infty 0.$$

Et parce que les racines de ces équations, qui marquent la valeur de l'inconnuë n, sont sourdes, il s'ensuit que les forces des joueurs, dont l'un donne à l'autre un avantage de quelques coups, sont incommensurables entre elles. La racine de la prémiére est à peu prés 4.216 (ou environ $4\frac{1}{5}$), de la seconde 1.946 (ou $1\frac{9}{10}$), de la troisiéme 1.313 (ou $1\frac{3}{10}$); ce qui fait voir, que celuy qui peut donner à l'autre quarante-cinq, doit être $4\frac{1}{5}$ fois plus fort: que celuy qui peut donner trente, doit être $1\frac{9}{10}$ fois; & qui peut donner quinze, $1\frac{3}{10}$ fois plus fort que l'autre: c'est à dire, que le prémier doit

doit gagner 42, le ſecond 19, & le troiſiéme 13 coups, lorsque leurs Parties en gagnent 10.

Or si A donne à B l'avantage, qui eſt neceſſaire pour rendre le jeu égal, ce ſera toute la même choſe, de jouër à un jeu, ou à deux jeux, ou à trois, ou à tant qu'il vous plaira: car s'il eſt également probable, que A gagne un jeu, ou qu'il le perde; il eſt auſſi également poſſible, qu'il face deux jeux de ſuite, ou qu'il les perde; quand la partie ſe fait à deux jeux; ou bien qu'il gagne ou perde trois jeux, quand elle ſe fait à trois jeux &c.

VIII. Si A donne à B demi-15, ou demi-30, ou demi-45, ſçavoir de combien A eſt plus fort que B? Mettons, qu'A donne à B demi-45, que la Partie ſe jouë à deux jeux; que B prenne au premier jeu 30, & à l'autre 45; puis derechef 30, si la Partie ſe remet à deux de jeu, puis 45, & ainsi alternativement; & que toutes les fois qu'il prend 30, ſon eſpérance de gagner le jeu ſoit à celle de A en raiſon de b à a, & toutes les fois qu'il prend 45, en raiſon de d à c. Cela posé, faiſons le ſort d'A au commencement de la Partie $\infty\ z$, & conſidérons ce qui arriveroit, si B gagnoit le prémier jeu: Alors B prendroit 45, & par l'hipotéſe A auroit c vraiſemblances de gagner le jeu ſuivant, & d vraiſemblances de le perdre. Or si A le gagne, la Partie ſe remet à deux de jeu, & il faut que B reprenne 30, tout de même qu'au comencement de la Partie: mais si A le perd, il perd enſemble la Partie: d'où il ſuit, que le ſort de A ſeroit en ce cas $\frac{c\,z + d.\,0}{c + d} \infty \frac{cz}{c+d}$. Que ſi au contraire A avoit gagné le prémier jeu, B prendroit auſſi 45 & A auroit aprés cela c aparences de gagner enſemble le jeu & la Partie; & d aparences de remettre la Partie à deux de jeu, en perdant le jeu: ainsi ſon ſort ſeroit alors $\frac{c.\,p + d\,z}{c+d} \infty \frac{cp + dz}{c+d}$ Enfin conſidérans les jouëurs comme au commencement de la Partie, où B prend 30, nous voyons qu'il y a pour A, a probabilités de gagner l'avantage du jeu, c'eſt a dire de parvenir au ſort précédent $\frac{cp + dz}{c+d}$, & b probabilités de perdre cet avantage & d'acquerir ainsi le ſort $\frac{cz}{c+d}$; ce qui luy vaut

$\frac{a.^{cP+dz:c+d}+b.^{cz:c+d}}{a+b} \infty \frac{acP+adz+bcz}{a+b.c+d}$. Mais nous ſupoſions le même ſort, qu'obtient A au commancement de la Partie $\infty\ z$; c'eſt pourquoi il y a égalité entre z & la dite quantité $\frac{acP+adz+bcz}{a+b.c+d}$, laquelle étant reduite on trouvera $z \infty \frac{ac}{ac+bd}$ P. Et parce que la Partie à demi-45 eſt ſuposée égale, dans laquelle avant le commencement du jeu le ſort de chacun ſoit $\frac{1}{2}$ P, il doit y avoir encore égalité entre $\frac{1}{2}$ P, & la valeur trouvée de z, d'où il reſulte celle-cy $ac \infty bd$, qui nous donne l'analogie $a.b::d.c$.

Cela fait voir, que la Partie ſera égale, quand ces quatre quantités a, b, d, c, ſont proportionnelles; c'eſt à dire, quand l'eſpérance du plus fort à gagner le jeu eſt à l'eſpérance du plus foible (ayant 30) comme reciproquement l'eſpérance du plus foible (ayant 45) eſt à celle du plus fort: ou bien, quand il y a 2, 3 ou 4 fois plus d'aparence, que le foible perde le jeu, ayant 30, & qu'il y ait au contraire autant d'aparence, qu'il le gagne, ayant 45, on luy peut donner demi-45.

Et il eſt à remarquer, qu'il n'importe, ſoit que B prenne au prémier jeu 30 & à l'autre 45; ou qu'au contraire il prenne d'abord 45, & puis 30: car ayant fait nôtre calcul, pour cette derniere hipotêſe, nous trouverons $z \infty \frac{c.^{aP+bz:a+b}+d.^{az:a+b}}{c+d} \infty \frac{acP+bcz+adz}{a+b.c+d}$, c'eſt à dire encore $z \infty \frac{ac}{ac+bd}$ P, comme auparavant. Par conſéquent ceux-là ſe trompent, qui s'imaginent, qu'il y a de l'avantage à prendre au prémier jeu le moins, & à l'autre le plus.

Or parce que le même raiſonnement ſubſiſte toujours, quelque raiſon que puiſſent marquer les lettres a, b & d, c; il s'enſuit, qu'il en ſera de même de la Partie, qui ſe jouë à demi-30, ou à demi-15; ſçavoir, qu'elle ſera égale toutes les fois, que l'eſpérance de A par raport à chaque jeu ſurpaſſe celle de B & en eſt ſurpaſſée alternativement en même raiſon.

Pour faire l'aplication de ce que nous venons d'établir, il faut déter-

déterminer pour chaque hipotéſe la valeur des lettres a, b, c, d; ce qui ſe fait ſans peine. On n'a qu'à prendre dans la 4me Table les ſorts de A, quand B eſt ſuposé avoir 45, ou 30, ou 15, ou 0, à rien; leſquels étant par ordre $\frac{n^5}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$,

$\frac{n^6+4n^5+n^4}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$,

$\frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$,

$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$, ceux de B, comme les reſtes à l'unité, ſeront $\frac{3n^4+4n^3+4nn+3n+1}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$,

$\frac{6n^4+8n^3+7nn+4n+1}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$,

$\frac{10n^4+15n^3+11nn+5n+1}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$,

$\frac{15n^3+11nn+5n+1}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$;

& par conſéquent les eſpérances d'A auront à celles de B les raiſons

$\frac{n^5}{3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$, $\frac{n^6+4n^5+n^4}{6n^4+8n^3+7nn+4n+1}$,

$\frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{10n^4+15n^3+11nn+5n+1}$, $\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{15n^3+11nn+5n+1}$,

D'où il eſt clair, que quand la Partie ſe jouë à demi-45, l'on doit faire $\frac{a}{b} \infty \frac{n^6+4n^5+n^4}{6n^4+8n^3+7nn+4n+1}$, & $\frac{c}{d} \infty$

$\frac{n^5}{3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$: quand elle ſe jouë à demi-30;

$\frac{a}{b} \infty$

$\frac{a}{b} \infty \frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 5n^4}{10n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}$, & $\frac{c}{d} \infty \frac{n^6 + 4n^5 + n^4}{6n^4 + 8n^3 + 7nn + 4n + 1}$: & enfin quand on la jouë à demi-15, $\frac{a}{b} \infty \frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4}{15n^3 + 11nn + 5n + 1}$, & $\frac{c}{d} \infty \frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 5n^4}{10n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}$. Subſtituans donc ces valeurs, nous aurons à la place de $ac \infty bd$, dans la prémiére hipotéſe, $\overline{n^6 + 4n^5 + n^4}$ in $n^5 \infty \overline{6n^4 + 8n^3 + 7nn + 4n + 1}$ in $\overline{3n^4 + 4n^3 + 4nn + 3n + 1}$: dans la ſéconde, $\overline{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 5n^4}$ in $\overline{n^6 + 4n^5 + n^4} \infty \overline{10n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}$ in $\overline{6n^4 + 8n^3 + 7nn + 4n + 1}$: & dans la troiſiéme, $\overline{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4}$ in $\overline{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 5n^4} \infty \overline{15n^3 + 11nn + 5n + 1}$ in $\overline{10n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}$; c'eſt à dire, que la multiplication faite, nous aurons les trois égalités:

$n^{11} + 4n^{10} + n^9 \infty 18n^8 + 48n^7 + 77n^6 + 90n^5 + 77n^4 + 49n^3 + 23nn + 7n + 1$,

$n^{13} + 9n^{12} + 32n^{11} + 54n^{10} + 31n^9 + 5n^8 \infty 60n^8 + 170n^7 + 256n^6 + 263n^5 + 193n^4 + 102n^3 + 38nn + 9n + 1$,

$n^{14} + 10n^{13} + 47n^{12} + 130n^{11} + 221n^{10} + 220n^9 + 75n^8 \infty 150n^7 + 335n^6 + 380n^5 + 281n^4 + 140n^3 + 47nn + 10n + 1$;

lesquelles enſuite ſe reduiſent à celles-cy:

$n^{11} + 4n^{10} + n^9 - 18n^8 - 48n^7 - 77n^6 - 90n^5 - 77n^4 - 49n^3 - 23nn - 7n - 1 \infty 0$,

$n^{13} + 9n^{12} + 32n^{11} + 54n^{10} + 31n^9 - 55n^8 - 170n^7 - 256n^6 - 263n^5 - 193n^4 - 102n^3 - 38nn - 9n - 1 \infty 0$,

$n^{14} + 10n^{13} + 47n^{12} + 130n^{11} + 221n^{10} + 220n^9 + 75n^8 - 150n^7 - 335n^6 - 380n^5 - 281n^4 - 140n^3 - 47nn - 10n - 1 \infty 0$;

où l'inconnuë n nous marque la raiſon d'entre les forces des deux joüeurs. Celuy qui aura le loiſir, pourra chercher les racines de ces équa-

équations ; je conjecture, qu'elles ſont environ $2\frac{7}{10}$, $1\frac{6}{10}$, & $1\frac{1}{10}$, tellement que celuy qui peut donner demi-45, doit gagner 27 : qui peut donner demi-30, doit gagner 16 : & enfin qui peut donner demi-15, doit gagner 11 coups contre dix coups de ſa Partie.

Avant que de finir cet article, je dois encore remarquer, que si l'avantage qu'on donne alternativement au joueür B, eſt tel, comme je l'ai dit, c'eſt à dire que les deux joueürs faſſent par là à chaque jeu un échange continuel de leurs eſpérances, la Partie ſera toujours égale, non ſeulement quand on la joüe à un ou pluſieurs couples de jeux, comme l'on pourroit s'imaginer, mais auſſi à quel nombre de jeux, qu'on voudra la joüer. Car poſé qu'on joüe à 3, 4 ou 5 jeux, que A donne à B un avantage alternativement plus petit & plus grand: ſavoir le plus petit, quand la ſomme des jeux qui leur reſtent eſt un nombre pair, & le plus grand quand cette ſomme eſt un nombre impair ; & qu'au prémier cas il y ait deux fois plus d'aparence que A gagne le jeu, & qu'à l'autre il y ait au contraire deux fois plus d'aparence que B le gagne : on trouvera le ſort de chacun à chaque jeu par ordre, comme l'on voit ici. (Tab. VI.) Les petits ronds vous marquent les jeux qui leur reſtent à faire ; & il paroit, que quand le nombre de ces jeux eſt égal de part & d'autre, le ſort de chaque joueür eſt toujours $\frac{1}{2}$ P.

IX. A donne à B demi-30, & à C 45 ; combien B peut-il donner à C? *Reſp.* Parce que la force de B eſt à celle d'A, comme 10 à 16, par l'article précédent ; & celle d'A à celle de C, comme 42 à 10, par l'art. 7. on doit conclure *ex æquo perturbatè*, que la force de B eſt à celle de C, comme 42 à 16, ou à peu prés comme 26 à 10 ; de ſorte que B pourra donner à C demi-45, par l'art. précéd.

X. A donne à B demi-30, & B à C demi-45 ; que peut donc A donner à C? *Reſp.* la force d'A étant à celle de B, comme 16 à 10 : & celle de B à celle de C, comme 27 à 10, par l'article 8 ; il s'enſuit par la compoſition des raiſons, que la force d'A eſt à celle de C, comme 432 à 100, c'eſt a dire que celui-là peut donner à celui-cy quarante-cinq, par l'art. 7.

XI. A eſt deux fois plus fort que B, & cinq fois plus fort que C. Donc B eſt $\frac{5}{2}$ fois plus fort que C, & lui peut donner par conſéquent preſque demi-45, par l'art. 8.

Table VI.

Jeux qui restent A	B	*Somme de ces jeux*	*Sort de A*
○ ○	○ ○	*Pair*	$\frac{1}{2}$
○ ○	○	*Impair*	$\frac{1.^{1:2}+2.^{0}}{3} \infty \frac{1}{6}$
○ ○ ○	○	P	$\frac{2.^{1:6}+1.^{0}}{3} \infty \frac{1}{9}$
○ ○ ○ ○	○	I	$\frac{1.^{1:9}+2.^{0}}{3} \infty \frac{1}{27}$
○ ○ ○ ○ ○	○	P	$\frac{2.^{1:27}+1.^{0}}{3} \infty \frac{2}{81}$
○	○ ○	I	$\frac{1.^{1}+2.^{1:2}}{3} \infty \frac{2}{3}$
○	○ ○ ○	P	$\frac{2.^{1}+1.^{2:3}}{3} \infty \frac{8}{9}$
○	○ ○ ○ ○	I	$\frac{1.^{1}+2.^{8:9}}{3} \infty \frac{25}{27}$
○	○ ○ ○ ○ ○	P	$\frac{2.^{1}+1.^{25:27}}{3} \infty \frac{79}{81}$
○ ○ ○	○ ○	I	$\frac{1.^{1:2}+2.^{1:9}}{3} \infty \frac{13}{54}$
○ ○ ○ ○	○ ○	P	$\frac{2.^{13:54}+1.^{1:27}}{3} \infty \frac{14}{81}$
○ ○ ○ ○ ○	○ ○	I	$\frac{1.^{14:81}+2.^{2:81}}{3} \infty \frac{2}{27}$

Jeux

Jeux qui restent A	B	*Somme de ces jeux*	*Sort de A.*
o o	o o o	I	$\frac{1.\,8:9 + 2.\,1:2}{3} \infty \frac{17}{27}$
o o	o o o o	P	$\frac{2.\,25:27 + 1.\,17:27}{3} \infty \frac{67}{81}$
o o	o o o o o	I	$\frac{1.\,79:81 + 2.\,67:81}{3} \infty \frac{71}{81}$
o o o	o o o	P	$\frac{2.\,17:27 + 1.\,13:54}{3} \infty \frac{1}{2}$
o o o o	o o o	I	$\frac{1.\,1:2 + 2.\,14:81}{3} \infty \frac{137}{486}$
o o o o o	o o o	P	$\frac{2.\,137:486 + 1.\,2:27}{3} \infty \frac{155}{729}$
o o o	o o o o	I	$\frac{1.\,67:81 + 2.\,1:2}{3} \infty \frac{148}{243}$
o o o	o o o o o	P	$\frac{2.\,71:81 + 1.\,148:243}{3} \infty \frac{574}{729}$
o o o o	o o o o	P	$\frac{2.\,148:243 + 1.\,137:486}{3} \infty \frac{1}{2}$
o o o o o	o o o o	I	$\frac{1.\,1:2 + 2.\,155:729}{3} \infty \frac{1349}{4374}$
o o o o	o o o o o	I	$\frac{1.\,574:729 + 2.\,1:2}{3} \infty \frac{1303}{2187}$
o o o o o	o o o o o	P	$\frac{2.\,1303:2187 + 1.\,1349:4374}{3} \infty \frac{1}{2}.$

XII. A eſt $\frac{3}{2}$ fois plus fort que B, & B $\frac{5}{2}$ fois plus fort que C. Donc A eſt $\frac{15}{4}$ fois plus fort que C, & ainsi lui pourra donner plus de demi-45, & moins de 45.

XIII. Connoiſſant les raiſons d'entre les forces de trois Jouëurs A, B, C, joüans un à un en tous ſens, on connoîtra auſſi le raport de leurs forces, quand deux de ces jouëurs joüent de compagnie contre le troiſiéme. Supoſons, que les forces abſoluës des trois jouëurs ſoient marquées par les lettres l, m, n; que A jouë contre les deux autres, & qu'il jouë indifféremment tantôt à B, tantôt à C: S'il jouë à B, il a l degrés de facilité de gagner le coup. & m degrés de le perdre; ce qui luy vaut $\frac{l}{l+m}$: & s'il jouë à C, il a encore l degrés d'aparence de gagner le coup, & n degrés de le perdre; ce qui fait $\frac{l}{l+n}$. Donc s'il eſt également poſſible, qu'il envoie la balle à B ou à C, comme nous ſupoſons, il y a un cas, qui luy fait avoir $\frac{l}{l+m}$, & un autre, qui luy fait acquerir $\frac{l}{l+n}$; ce qui luy donne par rapport à ce coup-là, $\frac{1.\, l:l+m + 1\, l:l+n}{2} \infty \frac{l}{2l+2m} + \frac{l}{2l+2n} \infty \frac{2ll+lm+ln}{2ll+2lm+2ln+2mn}$, tellement qu'il reſte pour le ſort des autres B & C, $\frac{lm+ln+2mn}{2ll+2lm+2ln+2mn}$. Ainsi leurs forces étant par exemple en raiſon de 3, 2, 1, le ſort d'A eſt $\frac{27}{40}$, & celuy des B & C $\frac{13}{40}$, c'eſt à dire que A peut gagner 27 coups, lorſque les autres n'en peuvent gagner que 13; de ſorte qu'il leur peut donner trente avec quelque avantage pour ſoi, comme il paroit par la cinquiéme Table. Que ſi vous faites $\frac{2ll+lm+ln}{2ll+2lm+2ln+2mn} \infty \frac{lm+ln+2mn}{2ll+2lm+2ln+2mn}$, vous aurez $ll \infty mn$; ce qui vous marque, que quand la force abſoluë de celui, qui jouë contre les deux autres, eſt moienne proportionnelle entre les forces de ceux-cy, la Partie ſe peut jouër à but.

Quand nous avançons, comme également probable, que le jouëur A envoie la balle à B ou à C, ce n'eſt qu'une ſupoſition, & la verité eſt, que plus le jouëur eſt habile, plus ſouvent il envoiera

la balle

la balle au plus foible. Pour avoir égard à cela, ſupoſez que toutes les fois qu'il jouë p balles au plus fort B, il en jouë un plus grand nombre q au plus foible C: donc il y a p cas, qui luy font avoir $\frac{l}{l+m}$, & q cas qui luy font obtenir $\frac{l}{l+n}$; ce qui luy vaut $\frac{p.\,l:l+m\,+\,q.\,l:l+n}{p+q}$ ∞ $\frac{pl}{p+q.\,l+m} + \frac{ql}{p+q.\,l+n}$ ∞ $\frac{pll+qll+qlm+pln}{pll+qll+plm+qlm+pln+qln+pmn+qmn}$: où si vous interpretez les lettres l, m, n, par 3, 2, 1, comme auparavant, & outre cela p par 1, & q par 3, vous trouverez le ſort d'A à l'égard de chaque coup ∞ $\frac{57}{80}$, plus grand que $\frac{27}{40}$ le ſort qu'il a; lors qu'il envoie les balles indiféremment à chacun des autres; en ſorte qu'il leur peut maintenant donner presque demi-45. Si vous faites $\frac{pll+qll+qlm+pln}{pll+qll+plm+qlm+pln+qln+pmn+qmn}$ ∞ $\frac{1}{2}$, vous aurez $plm - pln + pmn - pll$ ∞ $qlm - qln - qmn + qll$; ce qui marque, que la Partie à but ſera égale, quand p eſt à q, comme $lm - ln - mn + ll$ à $lm - ln + mn - ll$; & il faut pour cet effet, que mn ſoit toujours plus grande que ll.

Maîs l'on doit encore ici conſidérer une choſe, qui contrebalance en quelque maniére l'avantage, que tire le joueür A de ce qu'il jouë le plus ſouvant au plus foible. C'eſt qu'étant ſeul contre deux, il ſe fatigue auſſi plus que chacun des autres, & que cette fatigue ſemble diminuër conſidérablement ſa force & ſon ſort: car trois perſonnes d'une égale force joüans enſemble, un contre deux, on voit bien, que ſelon ce calcul, la Partie devroit étre égale, au lieu qu'il eſt plus probable, que les deux la gagneront contre le troiſiéme, vû qu'ils ne ſe laſſent pas tant, & qu'ils ne défendent chacun que la moitié du Jeu de Paume. Pour avoir donc égard à cette diférence, il faudroit juger des forces abſoluës de nos joueürs par le nombre des coups, qu'ils gagnent ou qu'ils perdent, non quand ils joüent chacun ſeul contre A, mais quand ils joüent conjointement contre luy: car ayant obſervé par exemple, que de tous les coups, qui ſe joüent entre A & B, le nombre de ceux que A gagne eſt au nombre de ceux que gagne B, comme l à r; & que de tous les coups qui ſe joüent

entre A & C, le nombre de ceux que A gagne eſt au nombre de ceux que gagne C, comme l à s; il eſt clair, que les forces abſolües des trois joüeurs A, B, C ſeront alors en raiſon de l, r, s; d'où leurs ſorts ſe déduiſent enſuite comme deſſus, en ſorte qu'on n'a qu'à ſubſtituër ſimplement les lettres r & s à la place de m & n.

XIV. Connoiſſant les raiſons des forces de quatre joueürs A, B, C, D, joüans un à un en tous ſens, on connoîtra le raport de leurs forces, quand ils joüent deux à deux, A & B contre C & D. Supoſons que leurs forces abſoluës ſoient exprimées par k, l, m, n; il ſe peut faire, que A (de même que B) jouë à C ou à D. Si A jouë à C, il a $\frac{k}{k+m}$; & s'il jouë à D, il a $\frac{k}{k+n}$ vraiſemblances de gagner le coup; c'eſt-ce qui le fait parvenir au ſort $\frac{1.k:k+m+1.k:k+n}{2} \infty \frac{2kk+km+kn}{2kk+2km+2kn+2mn}$. Par la même raiſon si c'eſt B qui jouë, ſon ſort eſt $\frac{1.l:l+m+1.l:l+n}{2} \infty \frac{2ll+lm+ln}{2ll+2lm+2ln+2mn}$. Or il eſt également poſſible, que A ou B joüe: donc il y a un cas, qui leur aporte $\frac{2kk+km+kn}{2kk+2km+2kn+2mn}$, & un autre, qni leur donne $\frac{2ll+lm+ln}{2ll+2lm+2ln+2mn}$; ce qui leur vaut $\frac{2kk+km+kn}{4kk+4km+4kn+4mn} + \frac{2ll+lm+ln}{4ll+4lm+4ln+4mn}$. Ainsi les forces abſoluës des quatre joueürs A, B, C, D, étant comme 1, 5, 2, 3, le ſort d'A & B par raport à chaque coup ſera $\frac{323}{672}$, & celuy de C & D $\frac{349}{672}$; ſi bien que ceux-cy peuvent donner à ceux-là presque demi-quinze. Si dans les dénominateurs de ces fractions literales vous mettez $4kl$ au lieu de $4mn$, vous aurez

$$\frac{2kk+km+kn}{4kk+4km+4kn+4kl} + \frac{2ll+lm+ln}{4ll+4lm+4ln+4kl} \infty \frac{2k+m+n}{4k+4m+4n+4l}$$

$$+ \frac{2l+m+n}{4l+4m+4n+4k} \infty \frac{2k+2l+2m+2n}{4k+4l+4m+4n} \infty \frac{1}{2};$$ ce qui montre,

que si les forces des joüeurs d'un côté & d'autre ſe trouvent reciproquement proportionnelles, la Partie qu'ils joüent à but ſera égale. Toutes fois il faut ici repeter l'avertiſſement du précédent article, ſçavoir

ſçavoir que les habiles ioüeurs tâchent toujours d'envoier les balles au plus foible, à quoi il faut avoir égard, si l'on y veut aller bien juſte.

XV. Si de deux joüeurs A & B l'un peut donner à l'autre un avantage de quelques coups, & qu'il aime mieux luy donner cet avantage en jeux entiers qu'en points; on veut ſçavoir, combien de jeux il luy doit donner? Par exemple, si A peut donner à B 45, & qu'il veüille joüer à but avec luy on demande, de combien de jeux il les luy peut donner tous à la reſerve d'un ſeul? Pour réſoudre cette queſtion, il faut conſidérer, que 1. A pouvant donner à B 45, la valeur de ſa force, marquée par la lettre n, ſera $\frac{4216}{1000}$ par l'art. 7me. 2. Quand il eſt à but avec B, l'eſpérance qu'il a de gagner le jeu eſt par la 4me Table, $\frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4}{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}$; par conſéquent celle de B eſt $\frac{15n^3 + 11nn + 5n + 1}{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}$; & la raiſon de leurs eſpérances $\frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4}{15n^3 + 11nn + 5n + 1}$. 3. Pour expliquer cette raiſon par nombres, en y ſubſtituant $\frac{4216}{1000}$ à la place de n, on peut ſe ſervir des Logaritmes, par le moien desquels on la détermine ſans peine à $\frac{711529}{134167}$. Nommons cette raiſon m, & cherchons ſucceſſivement, quel eſt le ſort de A par raport à la Partie, quand il luy manque 1, 2, 3, 4 &c. jeux, pendant qu'à B il n'en manque toujours qu'un; juſqu'à ce que nous voïons par la progreſſion, quel doit étre ce ſort, lors qu'il luy manque x jeux. Or s'il luy manque un jeu, de même qu'à B, c'eſt à dire si les deux joüeurs ſont à deux de jeux, il eſt aisé de juger par ce que j'ay démontré dans l'art. 4, que le ſort de A eſt $\frac{mm}{mm+1}$. S'il luy manque deux jeux, il eſt clair qu'il y a m cas, qui le pourront mettre à deux de jeu avec B en luy faiſant gagner le jeu, & un cas qui luy fait perdre le jeu & la Partie; ce qui luy vaut $\frac{m . mm : mm+1 + 1 . 0}{m+1} \infty \frac{m^3}{mm+1 . m+1}$. S'il luy manque trois jeux, il n'eſt pas moins clair, que m cas luy en feront reſter deux en luy faiſant gagner le jeu, & qu'un cas luy fera encore

perdre

perdre la Partie; ce qui luy produit $\frac{m.\overline{m^3 : mm+1.m+1} + 1.^0}{m+1} \propto \frac{m^4}{mm+1.\overline{m+1}^2}$. Et s'il luy en manque quatre, il y a m cas qui luy en feront rester trois, & un cas qui luy fera perdre la Partie; ce qui luy aporte $\frac{m.\overline{m^4 : mm+1.\overline{m+1}^2} + 1.^0}{m+1} \propto \frac{m^5}{mm+1.\overline{m+1}^3}$ En un mot, quel nombre de jeux qu'il luy manque, son sort se trouve toujours exprimé par une fraction, dans laquelle l'exposant de m est plus grand, & celuy de $m+1$ plus petit d'une unité, que le nombre de ces jeux. D'où l'on infére, que s'il manque x jeux à A & un jeu à B, c'est à dire s'ils joüent à x jeux, dont A donne $x-1$ d'avance à B, le sort de A sera $\frac{m^{x+1}}{mm+1.\overline{m+1}^{x-1}}$; & parce qu'en cet état la Partie est suposée égale, il y aura $\frac{m^{x+1}}{mm+1.\overline{m+1}^{x-1}} \propto \frac{1}{2}$, c'est à dire $2.m^{x+1} \propto mm+1.\overline{m+1}^{x-1}$; & en prenant les logaritmes, $L2 + \overline{x+1}\,Lm \propto L\,\overline{mm+1} + \overline{x-1}\,L\,\overline{m+1}$ ou par la transposition $x\,L\,\overline{m+1} - x\,Lm \propto L\,\overline{m+1} + Lm + L2 - L\,\overline{mm+1}$; & enfin par la division $x \propto \frac{L\,\overline{m+1} + Lm + L2 - L\,\overline{mm+1}}{L\,\overline{m+1} - Lm}$. Pour achever maintenant la solution on n'a qu'à y mettre $\frac{7114529}{134167}$ au lieu de m, & son logaritme au lieu de Lm &c. moiennant quoi l'on trouve que x est tant soit peu plus grand que 38; de sorte que celuy qui peut donner à l'autre 45 pourra luy donner jusques à 37 jeux entiers de 38; s'ils veulent joüer à but ensemble. D'où il paroit, qu'il y a bien de la diférence entre donner de 4 coups trois, & donner de 4 jeux trois; vû que nous venons de voir, que celuy qui peut donner à l'autre 45, c'est à dire trois coups de quatre, peut bien luy donner d'avantage que trois jeux de quatre. En voici le calcul:

$m \propto \frac{7114529}{134167}$, $\qquad m+1 \propto \frac{7348696}{124167}$,

$L\,7114529 \propto 6.8521462$, $\qquad L\,7248696 \propto 6.8602599$,

$L\,134167 \propto 5.1276457$, ... 5.1276457,

$Lm \propto$

Lm ꝏ $L\frac{7114529}{134167}$ ꝏ 1.7245005; $L\overline{m+1}$ ꝏ $L\frac{7148696}{134167}$ ꝏ 1.7326142,

2,

Lmm ꝏ 2 *Lm* . . ꝏ $\overline{3.449010}$ *Lmm* $\overline{+1}$ ꝏ 3.4491555.

$L\overline{m+1}$	ꝏ 1.7326142	81137) 3089892 (38 ꝏ *x*.
Lm	ꝏ 1.7245005	243411
*L*2	ꝏ 0.3010300	655782
$L\overline{m+1} + Lm + L2$.	ꝏ 3.7581447	649096
$L\overline{mm+1}$	ꝏ 3.4491555	6686
$L\overline{m+1} + Lm + L2 - L\overline{mm+1}$	ꝏ 0.3089892	
$L\overline{m+1} - Lm$ . . .	ꝏ 0.0081137	

XVI. Le Joüeur A pouvant donner à B 45, l'on demande de combien de jeux il les luy peut donner tous à la reserve d'un seul, si outre les jeux entiers qu'il luy donne, il luy veut encore donner 15 ou 30 à chaque jeu? Pour satisfaire à la question, vous n'avez qu'à mettre $\frac{n7+5n6+11n5+5n4}{10n4+15n3+11nn+5n+1}$ & puis $\frac{n6+4n5+n4}{6n4+8n3+7nn+4n+1}$ (raisons des espérances, qu'on leur trouve par la 4me Table, lorsque B a 15 ou 30 à rien) à la place de $\frac{n7+5n6+11n5+15n4}{15n3+11nn+5n+1}$ (raison des espérances qu'ils obtiennent quand ils joüent à but), en y interprétant encore *n* par $\frac{4216}{1000}$: ce qui vous fera trouver *m* ꝏ $\frac{6798590}{401355}$, & puis *m* ꝏ $\frac{1125963}{2637411}$; d'où le reste se déduit comme dessus, & il proviendra à peu prés *x* ꝏ 12, & ensuite *x* ꝏ 4; de sorte que A peut donner à B 11 jeux de 12, & encore 15 points en chaque jeu; ou bien 3 jeux de 4 & encore 30 points en chacun.

XVII. Si A peut donner à B 30, & qu'on demande combien de jeux entiers il luy peut donner; il faut seulement changer la valeur de *n*, qui marque sa force, en $\frac{1545}{1000}$ par l'art. 7me, & faire ensuite comme dessus, pour trouver celle de *x*. Le calcul nous aprend, qu'il peut luy donner environ de cinq jeux quatre, & joüer à but; ou deux jeux de trois, & encore 15 points en chaque jeu. Si A ne peut donner à B que 15, la valeur de *n* sera censée $\frac{1313}{1000}$ par l'art. 7. & l'on

trouvera qu'il ne ſauroit luy donner qu'un jeu de deux, s'il prétend de joüer à but avec luy.

XVIII. On peut former pluſieurs queſtions ſur les Biſques, qui ſont des coups d'avance donnés par l'une des parties à l'autre, qui en profite quand bon luy ſemble; & demander par exemple: si dans un cas donné il eſt plus avantageux de prendre ſa biſque, ou de ne la pas prendre? si deux biſques en quatre jeux valent mieux que demi-quinze: ou quinze & deux biſques mieux que demi-trente? & autres ſemblables. Mais comme ces queſtions nous meneroient trop loin, je ne veux pas les toutes entreprendre: je me contenterai ſeulement de m'arréter un peu ſur la prémiére. Supoſons, que les joüeürs ne jouënt qu'à un jeu: que la force de A ſoit à celle de B en raiſon d'égalité ou d'inégalité quelconque, n à 1: & que B donne à A biſque (car bien que cela ne ſe pratique pas, quand on ſçait que les joüeurs ſont égaux: il arrive ſouvant, que B ne connoit pas les forces d'A, celuy-cy ayant diſſimulé auparavant ſon jeu; ou que A la demande par opiniâtreté, ou parce qu'il a perdu le jeu précédent qu'il jouoit à but, quoy qu'on ſache d'ailleurs qu'ils ſont égaux) puis ſupoſons, qu'ils ſoient à deux & que A n'ait pas encore pris ſa biſque; l'on demande, quelle eſt ſon eſpérance de gagner le jeu? & s'il fait mieux de prendre ſa biſque, ou de la garder plus long temps? Sur quoi je fais ce raiſonnement: S'il prend ſa biſque, il gagne l'avantage, mais il n'aura plus de biſque: par conſéquent ſon ſort ſera par la Table IV $\frac{n^3+nn+n}{n^3+nn+n+1}$; s'il ne prend pas ſa biſque, il ſe peut faire qu'il gagne ou perde le coup prochain: s'il le gagne, il a gagné le jeu; car ayant l'avantage il ne manquera pas de prendre aprés ſa biſque: mais s'il perd le coup, il aura bien encore ſa biſque, mais B aura l'avantage; & puiſque le ſort d'A en cette rencontre à cauſe de la biſque m'eſt encore inconnu, je l'apelle y. Y ayant donc par l'hipotêſe n cas qui luy ſont gagner le coup, & un cas qui le luy fait perdre, le ſort qu'il obtient quand il ne prend pas la biſque ſera $\frac{n.1+1.y}{n+1} \infty \frac{n+y}{n+1}$. Or, par le privilége des biſques, A eſt également en pouvoir de prendre ſa biſque ou de ne

la pas prendre; c'est à dire, il peut également acquerir $\frac{n^3+nn+n}{n^3+nn+n+1}$ ou $\frac{n+y}{n+1}$: c'est pourquoi si le sort, qui luy convient pendant cette indifférence, est apellé x, il y aura $x \infty \frac{n^3+nn+n}{2n^3+2nn+2n+2} + \frac{n+y}{2n+2}$.

Pour chercher le sort y, il faut faire un semblable raisonnement: *Si* A prend sa bisque, il remet le jeu à deux, & n'aura plus de bisque; c'est-ce qui luy donne par la Table IV $\frac{nn}{nn+1}$. S'il ne prend pas la bisque, & qu'il gagne le coup, il gagne le sort x (parce qu'il sera à deux, & aura encore sa bisque); mais s'il le perd il perd ensemble le jeu; c'est ce qui luy vaut alors $\frac{n.x+1.0}{n+1} \infty \frac{nx}{n+1}$. Or A est également en droit de prendre sa bisque ou de ne la pas prendre, c'est à dire d'acquerir $\frac{nn}{nn+1}$ ou $\frac{nx}{n+1}$; c'est pourquoi son sort pendant cette indiférence, que nous apellons y, sera $\frac{nn}{2nn+2} + \frac{nx}{2n+2}$. Mettant donc cette valeur de y dans l'équation $x \infty \frac{n^3+nn+n}{2n^3+2nn+2n+2} + \frac{n+y}{2n+2}$, nous trouverons $x \infty \frac{4n^4+7n^3+7nn+4n}{4n^4+7n^3+8nn+7n+4} \infty$ $\frac{n+1.4n^3+3nn+4n}{nn+1.4nn+7n+4}$; & puis substituant reciproquement celle-cy nous aurons $y \left(\frac{nn}{2nn+2} + \frac{nx}{2n+2}\right) \infty \frac{nn.4nn+5n+4}{nn+1.4nn+7n+4}$.

Ainsi le jeu étant à deux, il se présentent trois quantitez, $\frac{n^3+nn+n}{n^3+nn+n+1}$ $\left(\frac{n^3+nn+n}{nn+1.n+1}\right)$, $\frac{n+y}{n+1}$ & $\frac{n+1.4n^3+3nn+4n}{nn+1.4nn+7n+4}$, qui marquent le sort de A dans trois differentes hipotéses: l'une, quand il prend sa bisque: l'autre, quand il ne la prend pas: & la troisiéme (qui doit étre moienne entre les deux autres), quand il est encore dans l'indiférence de la prendre ou de ne la prendre pas. Et parce que la prémiére aprés la reduction à un méme dénominateur se trouve plus grande que la troisiéme, il s'ensuit qu'à plus forte rai-

son elle sera plus grande que la seconde, & que par conséquent A fait mieux de prendre sa bisque, que de la garder pour une autre fois.

Si l'on examine ces trois autres quantitez $\frac{nn}{nn+1}$, $\frac{nx}{n+1}$, & $\frac{nn \cdot 4nn+5n+4}{nn+1 \cdot 4nn+7n+4}$, que nous avons trouvées par la même opération, & qui marquent le sort de A dans les dites hipotêses, quand B a l'avantage, ou (ce qui est autant) quand il a 45 à 30, l'on peut remarquer, que la prémiére est aussi plus grande que les deux autres; de sorte qu'en cet état A fait encore mieux de prendre sa bisque.

Vous trouverez enfin avec ces raisonnemens les sorts du joüeur A, pour toutes les autres constitutions du jeu, lorsque B a 45 à 15, ou 45 à rien, ou 30 à 15 &c. & même avec moins de peine, si vous y allez par ordre; car vous ne rencontrerez plus dans vôtre opération que des sorts déja trouvés & connus. Je me contente de vous les donner pour des joüeurs égaux dans les trois colonnes marquées I. II. III. de la Table septiéme : la prémiére considére le joueur A, comme prenant sa bisque; la troisiéme, comme ne la prenant pas; & celle du milieu, comme ne s'étant pas encore déterminé s'il la prendra ou non: & l'on remarque par tout, que les fractions de la prémiére colonne sont un peu plus grandes que celles des autres; d'où l'on peut généralement conclure, qu'il est toujours plut avantageux pour A de prendre d'abord sa bisque, que de la garder plus long temps.

XIX. Le calcul du précédent article supose le joüeur A dans une parfaite indiférence au regard de sa bisque, qui luy donne toujours un panchant égal de la prendre ou de ne la prendre pas: cepenpendant il faut remarquer, que quoi qu'il soit également en pouvoir de la prendre à chaque coup, il n'est pas toujours également probable qu'il la prenne; y ayant des endroits, où il peut la faire mieux valoir qu'en d'autres; si ce n'est peut-être quand on joüe sans faire des chasses, auquel cas je ne vois aucune raison, pourquoi il faudroit diférer la bisque d'un seul coup: mais faisant des chasses, il y a des rencontres, où on la peut emploier si utilement, qu'elle sert

presque

Table VII.

NB. A & B *sont des joüeurs égaux:* A a *une bisque à prendre.*

Points de A	Points de B	Sorts de A I.	Sorts de A II.	Sorts de A III.	co. de chaff.
45	45	3/4	11/15	43/60	12/15
30	45	1/2	13/32	11/30	15/7
15	45	1/4	7/30	13/60	15/11
0	45	1/8	29/240	7/60	15/13
30	30	3/4	11/15	43/60	12/15
15	30	1/2	59/120	29/60	8/7
0	30	5/16	99/320	49/160	45/43

Points de A	Points de B	Sorts de A I.	Sorts de A II.	Sorts de A III.	col. des chaff.
30	15	7/8	209/240	13/15	17/15
15	15	11/16	219/320	109/160	4[illegible]/44
0	15	1/2	319/640	159/320	61/59
30	0	15/16	899/960	449/480	15/15
15	0	13/16	779/960	389/480	123/119
0	0	21/32	1007/1536	503/768	303/298

presque de trente; car y ayant une chasse dificile à gagner pour A, elle est autant que perduë pour luy; prenant donc sa bisque, il empêche non seulement sa Partie de gagner 15, mais il les gagne luy-même, ce qui luy vaut 30. Comme donc la détermination du sort des joüeurs, qui demande la considération des bisques, dépend de la constitution particuliére du jeu, de la diversité des chasses, & même du caprice des joüeurs, qui n'observent point de regles, il est dificile d'en former des conjectures bien sûres. Voici pourtant la maniére, dont je voudrois m'y prendre, s'il falloit encore avoir égard aux chasses: Posé que les joüeurs soient trentains ou à deux, & qu'il y ait une chasse plus dificile à gagner à l'un qu'à l'autre (le nombre des fois, qu'on en a vû gagner une semblable au joüeur A, étant au nombre des fois, qu'on en a vû gagner à B, en raison d'inégalité quelconque de *m* à 1) bien que les deux joüeurs soient d'ailleurs égaux; je considére, que si le joüeur A gagne la chasse sans prendre sa bisque, il gagne le jeu, car il ne manquera pas de la prendre aprés: & s'il perd la chasse, B aura l'avantage, mais A retiendra sa bisque, qui luy vaut, par la II^me colonne de la VII^me Table, $\frac{11}{15}$. Parce donc que par l'hipotêse ce joüeur a *m* degrez de facilité de gagner la chasse contre un degré de la perdre, le sort, qu'il posséde quand il

d 3 ne p.end

ne prend pas ſa biſque, ſera $\frac{m \cdot 1 + 1 \cdot 13:30}{m+1} \infty \frac{30m+13}{30m+30}$. Mais si au contraire il prend cette biſque, la chaſſe eſt morte, & ſon ſort ſe trouve, par la I. colonne de la dite Table, $\frac{3}{4}$. Je n'ay donc qu'à chercher, laquelle des deux fractions, ou de $\frac{30m+13}{30m+30}$ où de $\frac{3}{4}$, ſurpaſſe l'autre; en faiſant ſur elles les mêmes opérations, que s'il y avoit égalité entre elles jusqu'a ce que m demeure ſeule d'un côté: moïennant quoi je trouve, que le joüeur A fait mieux tantôt de garder, tantôt de prendre ſa biſque, ſuivant que m eſt plus grande ou plus petite que $\frac{12}{15}$; & qu'il luy doit étre indiférent de la prendre ou de la garder, si m eſt au juſte $\infty \frac{12}{15}$. Poſé de nouveau, que A ait 30 à 45, ou que B ait l'avantage, & qu'il y ait la même chaſſe; il eſt clair, que si A la gagne ſans prendre ſa biſque, il ſera à deux, par conſequent par la II. col. de la VII^{me} Table il aura $\frac{11}{15}$: mais que s'il perd la chaſſe, il perdra le jeu. Ayant donc m cas de la gagner & un cas de la perdre, il aura (quand il ne prend pas ſa biſque) $\frac{m \cdot 11:15 + 1 \cdot 0}{m+1} \infty \frac{11m}{15m+15}$. Si A veut au contraire prendre la biſque, le jeu ſe met à deux, & la chaſſe étant morte le ſort de chacun ſera $\frac{1}{2}$. Faiſant donc comparaiſon entre $\frac{11m}{15m+15}$ & $\frac{1}{2}$, nous trouvons, qu'il vaut mieux pour A de garder ou de prendre la biſque, ſelon que m eſt plus grande ou plus petite que $\frac{15}{7}$. & que l'un vaut autant que l'autre, si $m \infty \frac{15}{7}$ De ce que je viens de faire voir, nous pouvons encore conclure, que la facilité, qu'a le joüeur A de gagner une chaſſe. étant exprimée par un nombre compris entre $\frac{12}{15}$ & $\frac{15}{7}$, il ſera mieux de garder ſa biſque, si le jeu eſt a deux; mais que si B a l'avantage il feroit mieux de la prendre. Enfin c'eſt de cette maniére, que j'ay determiné tous les autres nombres de la colonne des chaſſes de la VII^{me} Table, qui nous peuvent marquer, quand le joüeur A doit prendre ou garder ſa biſque: car s'il a plus de facilité de gagner quelque chaſſe, qu'il n'eſt porté par ces nombres, il fait mieux de garder la biſque; s'il en a moins, il fait mieux de la prendre; & s'il en a tout juſte autant, il peut faire ſans préjudice ce qu'il veut.

XX. Il me reſte encore à parler des *ſervices*, & de l'avantage qu'il y a de les donner. Vous ſçavez, que le prémier coup de chaque bale, qu'on donne ſur le toit, s'apelle *ſervice*. Celuy qui le donne ſemble avoir quelque avantage par deſſus celuy qui le reçoit, pour deux raiſons: l'une, parce que le coup de ſervice eſt un coup ſeur, qui ſe donne la bale à la main; au lieu que les coups qui ſe joüent enſuite la bale en l'air ſont ſujets d'étre manqués: l'autre, parce que quand celuy qui ſert manque quelque bale, c'eſt une *chaſſe*, au lieu que quand l'autre la manque, il perd toujours quinze (du moins si la bale entre dans le jeu; car pour les *chaſſes de vers le jeu*, je n'en veux pas parler, de peur de me trop étendre, & il me ſufit de vous marquer en gros la route, qu'il faut tenir dans cette recherche.) Poſons qu'il y ait deux joüeurs A & B, que A donne le ſervice, que contre un coup qu'il a manqué, on ait obſervé qu'il ait fait p bons coups; & que contre un coup qu'a manqué B, on luy en ait vû faire q de bons: poſons encore que dans le temps que c'eſt à A de joüer, ſon eſpérance de gagner la bale ſoit y, mais que cette eſpérance devienne z, quand l'autre B doit joüer; & conſidérons prémiérement ce qui ſeroit de ces eſpérances, ſi l'on joüoit ſans faire des chaſſes, c'eſt à dire ſi la bale qu'on manque étoit toujours perduë pour celuy qui la devroit joüer. Or parce que nous venons d'établir il eſt aisé de voir, que ſi A doit joüer, il y a un cas, qui luy fera perdre la bale, & p cas qui luy faiſant reüſſir ſon coup mettront B dans la neceſſité de joüer, & changeront ainsi le ſort y du joüeur A en celuy de z. Si c'eſt au contraire B qui joüe à ſon tour, il y a un cas qui fera gagner la bale à A (en la faiſant perdre à B) & q cas qui remettront le joüeur A dans la neceſſité de joüer, & luy rameneront le ſort y.

Donc nous aurons d'un côté $y \infty \frac{1.0 + p.z}{1+p} \infty \frac{pz}{1+p}$; de l'autre $z \infty \frac{1.1 + q.y}{1+q} \infty \frac{1+qy}{1+q}$, c'eſt à dire, mettant à la place de y ſa valeur trouvée $\frac{pz}{1+p}$, $z \infty \frac{1+p+pqz}{1+p.1+q} \infty \frac{1+p+pqz}{1+p+q+pq}$; d'où l'on tire $z \infty \frac{1+p}{1+p+q}$. Or parce que le joüeur A ne ſauroit manquer

ſon

ſon coup de ſervice, il s'enſuit qu'il ne faut pas conter ce coup, & s'imaginer quand il le jouë, comme si c'étoit à B de jouër: donc l'eſpérance qu'il a de gagner la bale ſera censée alors $\frac{1+p}{1+p+q}$ par conſéquent celle de B $\frac{q}{1+p+q}$, & la raiſon de ces eſpérances $1+p$ à q. D'où il paroit, que ſi les deux jouëurs ſont égaux, & que chacun puiſſe fraper par ex. dix bons coups contre un qui ne vaut rien, les lettres p & q valant chacune 10, l'avantage de celuy qui donne le ſervice ſur celuy qui le reçoit eſt comme de 11 ſur 10; mais que cet avantage augmente à meſure que les joüeurs ſont plus foibles, & qu'il diminuë juſques à s'anéantir entiérement, à meſure qu'ils ſe trouvent plus habiles.

XXI. Joignons y maintenant la conſidération des chaſſes, mais ſans nous embaraſſer de leur inégalité, en nous imaginant, comme si elles étoient toutes deſſous la corde; c'eſt à dire, come si toutes les bales qui paſſent la corde, pouvoient les gagner. Vous ſçavez que quand il y a chaſſe, les joüeurs font un échange de leurs places, & paſſant chacun de l'autre côté du jeu, celuy qui a donné les ſervices, eſt obligé de les prendre aprés. Que ces quatre lettres v, x, y, z, marquent donc l'eſpérance d'A en quatre diférens états; ſçavoir, les deux prémiéres v & x, avant qu'il y ait chaſſe; les autres y & z aprés la chaſſe, quand les joüeurs ont paſſé: la prémiére v & troiſiéme y, quand c'eſt à A de joüer; & la ſeconde x & 4^me^ z, quand l'autre B doit joüer. Cela posé, & le raiſonnement du précédent article compris, vous comprendrez auſſi ſans peine la raiſon des quatre égalitez ſuivantes, ſans qu'il ſoit beſoin d'alonger d'avantage ce diſcours: $v \propto \frac{1.y+p.x}{1+p} \propto \frac{y+px}{1+p}$, $x \propto \frac{1.1+q.v}{1+q} \propto \frac{1+qv}{1+q}$, $y \propto \frac{1.0+p.z}{1+p} \propto \frac{pz}{1+p}$, $z \propto \frac{1.1+q.y}{1+q} \propto \frac{1+qy}{1+q}$. Chaſsez de l'égalité x la lettre v, & de l'égalité y la lettre z, vous aurez $x \propto \frac{1+p+qy+pqx}{1+p.1+q}$, c'eſt à dire $x \propto \frac{1+p+qy}{1+p+q}$; & $y \propto \frac{p+pqy}{1+p.1+q}$,

$\frac{p+pqy}{1+p.\overline{1+q}}$, c'est à dire $y \infty \frac{p}{1+p+q}$. Chassés encore y de la nouvelle égalité x, vous trouverés enfin $x \infty \frac{1+2p+q+pp+2pq}{\overline{1+p+q}^2}$, & son reste à l'unité $1-x \infty \frac{q+qq}{\overline{1+p+q}^2}$. D'où il faut conclurre, que l'espérance d'A, dans le temps que B doit recevoir de luy le coup de service, est à celle de B en raison de $1+2p+q+pp+2pq$ à $q+qq$; où vous pouvés remarquer, que p & q étant égales plus on augmente leur valeur, plus cette raison approche de la triple, de sorte que de deux joüeurs, qui jouënt également & parfaitement bien, celuy qui sert a environ trois fois plus d'espérance de gagner la bale, que l'autre: mais souvenés vous, que c'est dans la supposition, qu'on ne fasse point de distinction entre les chasses, & qu'on n'admette pas celles, qu'on apelle *de vers le jeu*; car autrement ce double regard diminûroit son avantage de beaucoup.

XXII. Je ne dois pas finir ma Lettre, Monsieur, sans avoir prévenu certains faux raisonnemens, qui pourroient tomber dans l'esprit sur cette matiére, de peur qu'ils n'éblouïssent par leur éclat trompeur, & ne fassent douter de la solidité des principes cy-dessus établis. Dans l'article septiéme on a demandé, combien de fois le joüeur A devoit étre plus fort que B, pour luy pouvoir donner 45? Quelqu'un auroit pû raisonner là-dessus ainsi: Si B joüoit contre un troisiéme joueür C de pareille force que luy, & qu'ils fussent 45 à 0, leurs sorts seroient par la I Table en raison de 15 à 1, c'est à dire que B pourroit gagner le jeu 15 fois, lorsque C ne le feroit qu'une fois. Or A donnant 45 à B la Partie est supposée égale, c'est à dire telle, que quand B gagne 15 fois le jeu A le peut aussi 15 fois. Donc A & C joüans ensemble à but, A le peut gagner 15 fois, là où C ne le peut gagner qu'une fois; & par conséquent A doit étre 15 fois plus fort que C, ou (ce qui est autant) que B, qui est d'une même force: au lieu que par nôtre analyse nous avons trouvé, qu'il ne devroit étre que $4\frac{1}{5}$ fois plus fort que luy. A quoi je répond, que quand ce raisonnement seroit aussi evident

qu'il ne l'eſt pas, il tire mal de la concluſion ce conſectaire qui eſt faux: *Par conſequent* A *doit être* &c. A, qui peut donner 45 à B, peut gagner 15 jeux contre un, s'il jouë à but avec luy, je l'accorde, car il en peut bien gagner $\frac{7114529}{134176}$ c'eſt à dire plus de 50, par le 15me art. mais il ne s'en ſuit pas de là, qu'il ſoit 15 fois plus fort, ſe pouvant faire qu'il gagne 15 jeux, ou même 50 jeux, si vous voulés, contre un, ſans qu'il ait gagné plus que 4 ou 5 fois plus de coups; à cauſe que tous les coups, que gagne B durant chaque jeu qu'il perd, ne ſont contés pour rien, lesquels pourtant aſſemblés feroient peut-être la quatriéme Partie des coups d'A. Remarquéz donc, qu'il vaut mieux, meſurer les forces des jouëurs par le nombre des coups que chacun gagne, que par celuy des jeux ou des Parties qu'ils font, quand ils jouënt à but.

Dans l'article treiziéme l'on à recherché, de combien A devoit étre censé plus fort, s'il joüoit contre deux autres B & C, posé que leurs forces abſoluës fuſſent en raiſon de 3.2.1? Il y auroit bien des gens, qui pour répondre à cette queſtion ſe ſerviroient de l'analogie tirée du mélange des choſes: S'il y avoit par ex. trois ſortes de vin, dont le prix fuſſent en raiſon de 3.2.1, il eſt certain, qu'ayant mélé les deux plus petits enſemble en égale quantité, le prix du mélé ſera de $1\frac{1}{2}$, & par conséquent le prix du meilleur à celuy de l'autre, comme 3 à $1\frac{1}{2}$, ou comme 2 à 1. Tout de même, dis-je, pourroient ils penſer, que les deux jouëurs B & C qui jouënt de compagnie contre le troiſiéme A, ne paſſant que pour un jouëur, leur jeu ſe mélant quasi, & qu'ainsi la force de A doit auſſi étre double de celle des deux autres prix enſemble. D'autres raiſonneroient peut-étre comme cela: Puis que par l'hipotêſe A gagne trois coups, là où B n'en gagne que deux, & qu'il en gagne encore trois, là où C n'en fait qu'un; il s'enſuit, qu'il doit gagner ſix coups, lorsque les deux autres enſemble n'en font que 3 + 1 ∞ 3; & que par conséquent ſa force doit encore ſurpaſſer au double celle des autres, comme nous avons conclu par le prémier diſcours: Or cela eſt contraire au calcul du 13me article, qui nous a fait trouver le ſort de A plus que le double de celuy des autres. Je puis

puis répondre en peu de mots à ce deux raiſonnemens: Pour le prémier, vous ſçavés, que les analogies ne prouvent rien; & pour l'autre, ſon paralogiſme paroit, en ce qu'on doit raiſonnablement ſuppoſer, que A jouë autant de fois ou plus ſouvent au plus foible C qu'à B. & que ſuivant ce raiſonnement il s'en fait tout le contraire; parce que A jouëroit à B cinq coups, dont il gagneroit trois; & à C il ne jouëroit que quatre coups, dont il gagneroit encore trois: au lieu que nôtre calcul remplit parfaitement cette condition; car mettéz que A jouë 20 coups à B, il en doit gagner 12: s'il en jouë donc autant à C, il en doit gagner 15; ce qui fait en tout 27, & B & C gagnent les autres 13: mais s'il jouë trois fois autant, c'eſt à dire 60 coups, à C, il en doit gagner 45, leſquels joints au 12, qu'il gagne ſur B, font 57, & il reſte pour B & C les autres 23; ce qui eſt tout à fait conforme à ce que porte le calcul du 13^me article.

Je finis, Monſieur, par cette reflexion: c'eſt qu'il eſt extrémement facile de ſe méprendre dans toutes ſes connoiſſances, si l'on n'y fait pas toujours une ſerieuſe attention: car les raiſonnemens, qu'on fait communément dans le monde, ne ſont pas meilleurs, que ceux que je viens de rapporter, mais ſouvant beaucoup pires: l'on voit tous le jours, que le plus ſçavans raiſonnent ſur de pures analogies; où s'ils s'imaginent de voir clair dans les choſes, ils prennent pour trés-évident ce qui ne l'eſt pas, & dont il n'y a que ceux, à qui l'uſage des Mathematiques a éclairé l'eſprit, qui ſoient capables d'en découvrir l'impoſture. Je ſuis &c.

ERRATA.

Pag. 41. lin. 12. 13. 14. dele c^n, *quibus contingere possit, ut in nulla n tesserarum prodeat quod susceptum est; & simili modo colligitur casus esse*

Pag. 70. lin. 24. in fin. pro in l. $2n$.

Pag. 71. lin. 9. pro bnc^m l. $b^n c^m$

Pag. 84. lin. pen. pro erit $2^n 1$ l. erit $2^n - 1$.

Pag. 92. lin. 2. post *constat* adde *Lemma propositum*.

Pag. 93. lin. 14. ab initio pro $\frac{b+a}{}$ l. $\frac{b+a}{r}$

& in fin. pro $\frac{nq--p--l--i--h--g}{r \quad\quad r}$ lege $\frac{nq}{r}\frac{-p-l-i-h-g}{r}$.

Pag. 95. in fin. lin. 4. & init. lin. 5. lege $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4}$, sic etiam in fine lin. 11. & init. lin. 12.

lege $\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}\ldots\overline{n-c+1}}{1.2.3.4\ldots\overline{c-1}}$

Pag. 106. lin. 28. pro $\frac{n.2.\overline{n-3}.\overline{n-4}\ldots\overline{n-c}}{1.2.3.4\ldots\overline{c-1}}$

lege $\frac{\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}\ldots\overline{n-c}}{1.2.3.4\ldots\overline{c-1}}$

Pag. 142. lin. 27. pro $\frac{1.2.4}{1.3.5}$ l. $\frac{1.2.4}{3.3.5}$

Pag. 143. lin. 6. pro $\frac{1.2.4.4.16}{2.3.5.9.17}$ l. $\frac{1.2.4.8.16}{2.3.5.9.17}$.

Pag. 150. lin. 21. pro extra hanc l. extrahant.

Pag. 178. lin. 1. pro $\frac{2}{969}$ l. $\frac{20}{969}$.

Pag. 198. in medio pro $2n-3^{\,1}18$. l. $2n\underline{-3:}18$.

Pag. 203. lin. 5. pro $\frac{a}{b}-\frac{a}{b}-n\frac{c^n}{a^n}$ l. $\frac{a}{b}-\frac{a}{b}-n\frac{c^n}{a^n}$.

Ead. pag. lin. ult. pro $\frac{b.^{m.1}+c.^{-1}}{a}$ l. $\frac{b.^{m-1}+c.^{-1}}{a}$.

Lettre sur les Parties du Jeu de Paume.

Pag. 8. lin. 4. pro $\frac{n^3}{n^3+nn+n+n+1}$ l. $\frac{n^3}{n^3+nn+n+1}$.

Pag. 24. lin. pen. pro $m+1\infty\frac{7348696}{124167}$ l. $m+1\infty\frac{7248696}{134167}$

NICOLAUS BERNOULLI
L. S.

PRodit nunc tandem diu deſideratus Patrui mei de Arte Conjectandi Tractatus poſthumus curâ Thurniſiorum Fratrum, qui rem gratam publico facturi Manuſcriptum Auctoris ab heredibus defuncti comparatum ſuis ſumtibus imprimi curaverunt. Propoſitum fuit Auctori monſtrare eximium uſum quem in vita civili habet ea Matheſeos pars, à paucis hactenus tractata, quæ de probabilitatibus dimetiendis agit. Qua ratione & quouſque Auctor hoc ſuum propoſitum executus fuerit jam recenſitum eſt in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum Gallicæ Anni 1705. & in Ephemeridibus Eruditorum Pariſienſibus Anni 1706. Diviſit Auctor Opus iſtud in quatuor Partes, quarum I^{ma} continet Illuſtris Hugenii Diatribam de Ratiociniis in Aleæ Ludo cum Annotationibus, quam Tractatui ſuo tanquam prima Artis Conjectandi elementa præmittendam eſſe judicavit. II^{da} Pars complectitur Doctrinam de Permutationibus & Combinationibus ad dimetiendas probabilitates ſumopere neceſſariam, cujus Uſum Parte III^{tia} in variis Sortitionibus & Ludis Aleæ explicuit. IV^{tam} Partem qua uſum & applicationem præcedentium ad res civiles, morales & œconomicas oſtendere voluit, adverſa diu uſus valetudine tandemque ipſa morte præventus imperfectam reliquit. Optaſſent quidem Editores, ut Defuncti Frater, qui unice abſolvendo huic operi maxime idoneus fuiſſet, defectum ſuppleviſſet; ſed ipſi plurimis aliis diſtricto negotiis operæ hujus demandatione noluerunt eſſe moleſti. Mihi quoque, quem olim Specimina quædam hujus Artis ad Jus applicatæ in Diſſertatione Inaugurali dediſſe noverant, id negotii deferre in animo habebant, quod vero abſens & in

peregrinatione constitutus suscipere non poteram. Reversus in Patriam denuoque rogatus operam hanc declinavi, cum juvenem me longoque rerum usu & experientia ad materiam hanc tractandam necessaria haud instructum negotio huic imparem fore sentirem, facileque judicarem, non tantum Lectori non satisfactum, sed etiam reliquis pretium ademtum iri, si vulgaria duntaxat & trita afferrem. Suasor itaque fui, ut Tractatus iste qui maxima ex parte jam impressus erat, in eodem quo eum Auctor reliquit statu cum publico communicaretur. Ne vero res utilissima, applicatio scilicet calculi probabilitatum ad œconomica & politica, plane negligatur, rogamus Nobiliss. D. Auctorem Libri Gallici *Essai d'Analyse sur les Jeux de Hazard*; Clariss. item Moyvræum, quorum uterque egregia hujus Artis Specimina non ita pridem publicavit, ut ipsi negotium hoc in se suscipere, eximiaque sua inventa cum publico suo tempore communicare dignentur. Speramus interim generalia illa, quæ Auctor quinque postremæ Partis capitibus tradit, Lectori industrio in specialium quæstionum enodatione non contemnendo usui fore. Hæc de ipso Tractatu præfanda esse censuimus. Adjunctæ sunt ab Editoribus Positiones Auctoris de Seriebus Infinitis, quinque Disputationibus olim ab ipso pertractatæ, quarum cum exemplaria multa hactenus frustra apud Bibliopolas nostros quæsita fuerint, illas simul impressas Tractatui isti subjecerunt. Accedit quoque ob cognatam materiam Epistola Auctoris Gallica cui titulus: *Lettre à un Amy, &c.* Illud etiam monendum est Typum variationum Versus Bauhusiani, *Tot tibi* &c. inter schedas Auctoris repertum à Correctore in gratiam Curiosorum insertum fuisse, adeoque postrema verba paginæ 78. omittenda esse. Reliquos errores, paucos quidem, à Correctore non observatos in calce Libri notavimus, quos ut Lector benevolus corrigat, precamur.

ARTIS

ARTIS CONJECTANDI
PARS PRIMA,

Complectens

Tractatum Hugenii de Ratiociniis
in Ludo Aleæ,
Cum Annotationibus
JACOBI BERNOULLJ.

CHRIST. HUGENII
ad
FRANC. SCHOOTENIUM
Præfatio.

CUm in editione elegantissimorum ingenii Tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clarissime, id inter cætera Te spectare sciam, ut varietate rerum, quarum tractationem instituisti, ostendas quàm latè se protendat divina Analytices scientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm proposito Tuo inservire posse, quæ de Aleæ Ratiociniis

conſcripſimus; quantò enim minùs rationis terminis comprehendi poſſe videbantur, quæ fortuita ſunt atque incerta, tantò admirabilior ars cenſebitur, cui iſta quoque ſubjacent. Quare cùm in Tui gratiam primùm illa exponenda ſuſceperim, Tuque digna exiſtimes, quæ ſimul cum ſubtiliſſimis Tuis inventis in lucem exeant, adeò Tibi non refragabor, ut etiam è re meâ eſſe exiſtimem hàc potiſſimùm ratione ipſa in manus hominum pervenire. Quippe cùm in re levi ac frivolâ operam collocâſſe videri alioqui poſſem, non tamen prorſùs utilitatis expers ac nullius pretii cenſebitur, quod Tu veluti inter Tua adoptaveris, nec ſine multo labore è vernacula linguâ noſtrâ in Latinam converteris. Quanquam, ſi quis penitiùs ea quæ tradimus examinare cœperit, non dubito quin continuò reperturus ſit, rem non, ut videtur, ludicram agi, ſed pulchræ ſubtiliſſimæque contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quæ in hoc genere proponuntur, nihilo minùs profundæ indaginis viſum iri confido, quàm quæ Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquantò plus habitura, cùm non, ſicut illa, in nudâ numerorum conſideratione terminentur. Sciendum verò, quòd jam pridem inter præſtantiſſimos totâ Galliâ Geometras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primæ inventionis gloriam hâc in re tribuat. Cæterùm illi, difficillimis quibusque quæſtionibus ſe invicem exercere ſoliti, methodum ſuam quisque occultam retinuêre, adeò ut à primis elementis univerſam hanc materiam evolvere mihi neceſſe fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in reſolvendis Problematîs pulchrè nobis convenire ſæpenumerò expertus ſum. Horum Problematum nonnulla

nulla in fine operis addidisse me invenies, omissâ tamen analysi, cum quòd prolixam nimis operam poscebant, si perspicuè omnia exequi voluissem, tum quòd relinquendum aliquid videbatur exercitationi nostrorum, si qui erunt, Lectorum. *Vale.*

DE RATIOCINIIS in Ludo Aleæ.

Etsi lusionum, quas sola sors moderatur, incerti solent esse eventûs, attamen in his, quantò quis ad vincendum quàm perdendum propior sit, certam semper habet determinationem. Ut si quis primo jactu unâ tesserâ senarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò verisimilius sit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum est, calculoque subducitur. Ita quoque, si cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis lusibus constet victoria, atque ego jam unum lusum vicerim, incertum adhuc uter nostrûm prior tertii victor sit evasurus. Verùm quanti exspectatio mea, & contra quanti illius, æstimari debeat, certissimo ratiocinio consequi licet, atque hinc definire, si ludum uti est imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depositum est mihi quàm adversario meo tribuenda esset: vel etiam si quis in locum sortemque meam succedere cupiat, quo pretio me eam ipsi vendere æquum sit. Atque hinc innumeræ quæstiones exoriri possunt inter duos, tres, pluresve collusores. Cumque minimè vulgaris sit hujusmodi supputatio, & sæpè utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda sit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam sive tesseras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æstimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad aliquid obtinendum, quantum si habeat, possit denuò ad similem sor-

tem sive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, si quis me inscio alterâ manu 3 solidos occultet, alterâ 7 solidos, mihique optionem det ex utrâ manu solidos accipere mâlim; hoc tantundem mihi valere dico, ac si 5 solidi mihi dentur. Quoniam quinque solidos habens, denuò eò pervenire possum, ut æquam expectationem nanciscar ad 3 vel 7 solidos obtinendos: idque æquo lusu contendens.

Propositio I.

Si a vel b expectem, quorum utrumvis æquè facilè mihi obtingere possit, expectatio mea dicenda est valere $\frac{a+b}{2}$.

Ad hanc regulam non solùm demonstrandam, verùm etiam primitùs eruendam posito x pro eo quod æquivalet expectationi meæ, oportet me, quùm x habeo, rursus ad similem sortem pervenire posse, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque lusus esse talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quisque deponat x, ac ut victor victo traditurus sit a. Hic autem lusus justus est, & patet me hâc ratione æquam habere sortem ad obtinendum a, si lusum perdam scilicet; aut $2x-a$, si vincam: tum enim obtineo $2x$, id nempe quod depositum est, de quo alteri erogandum est a. Quòd si autem $2x-a$ tantundem valeret atque b, æqua mihi sors obtingeret ad a quàm ad b. Pono itaque $2x-a \infty b$, & fit $x \infty \frac{a+b}{2}$, pro valore meæ expectationis. Cujus demonstratio facilis est. Etenim habens $\frac{a+b}{2}$ possum cum alio certare, qui etiam $\frac{a+b}{2}$ deponere volet, hâc conditione ut vincens victo sit traditurus a. Quâ ratione similis expectatio mihi obtinget ad obtinendum a, si perdam, aut ad obtinendum b, si vincam; tum enim obtineo $a+b$, id nempe quod depositum est, alterique inde concedo a.

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua sors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propositionem valet 5; & certum est me 5 habentem rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Si enim cum

cum alio certans 5 deponam, atque ille similiter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri sit daturus 3: erit hic lusus omnino justus, & patet mihi æquam obtingere sortem ad obtinendum 3, si perdam; aut 7, si vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

Annotationes.

AUctor hujus Tractatûs in fine Procemii sui generaliter, in hâc verò & duabus sequentibus Propositionibus specialiùs totius Artis fundamentum exponit, quod cùm plurimùm intersit ut rectè intelligatur, conabor illud alio magis populari & ad cujusque captum accommodato ratiocinio demonstratum dare, hoc tantùm posito seu axiomate seu definitione: quòd *unusquisque tantundem expectet, vel expectare dicendus sit, quantum infallibiliter obtinebit.* Nimirum ad primam Propositionem: Cogitemus, quendam alterâ manu occultâsse 3 solidos seu a, alterâ 7 solidos seu b; alterique mecum permittere, ut unus quod in unâ, alter quod in alterâ manu est, accipiamus: quâ ratione fiet, ut simul ambo infallibiliter consecuturi simus, ac proinde expectare debeamus, id quod in utrâque manu reconditum est, nempe 10 solidos seu $a+b$. Sed concedendum quoque est, utrumque nostrûm æquale jus habere in hoc quod expectamus; quare consequitur, expectationem totalem in duas æquas portiones dividendam esse, & cuique tribuendum seorsim dimidium expectationis totalis, id est, 5 seu $\frac{a+b}{2}$.

Coroll. Patet hinc, si in unâ manu occultaverit aliquid seu a, in alterâ nihil, fore cujusque expectationem seorsim illius alicujus dimidium, seu $\frac{1}{2}a$.

Schol. Ex dictis colligi potest, vocabulum *Expectationis* non sumi hîc sensu vulgari, quo communiter expectare vel sperare dicimur quod omnium optimum est, licèt nobis pejus accidere possit; sed quatenùs spes nostra impetrandi optimum temperata & imminuta est metu consequendi pejus: adeò ut per valorem ejus semper significetur intermedii quidpiam inter optimum quod speramus, & pessimum quod metuimus; quod hîc & in sequentibus ubique est intelligendum.

 PRO-

PROPOSITIO II.

SI a, b, vel c expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere possit, expectatio mea æstimanda est $\frac{a+b+c}{3}$.

Ad quod rursus inveniendum, ponatur, ut ante, x pro valore expectationis meæ. Oportet ergò me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse justo lusu. Ponatur lusus esse talis, ut cum duobus aliis ludam hâc conditione, ut quisque nostrûm trium deponat x, & ut cum uno hoc pactum aggrediar, si ipse victor evadat, mihi sit daturus b, & ego ipsi traditurus sim b, si idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc ineam conditionem, ut ille ludum vincens mihi traditurus sit c, aut ego ipsi sim daturus c, si ego vincam. Et patet hunc ludum justum esse. Æquam autem hâc ratione sortem habebo ad obtinendum b, si nimirum primus vincat, aut c, si secundus vincat, aut etiam $3x-b-c$, si ego vincam; tunc enim obtineo $3x$, quod depositum est, de quo uni concedo b, & alteri c. Quòd si $3x-b-c$ æquale fuerit ipsi a, eadem mihi obtingeret expectatio ad obtinendum a, quæ ad b, aut ad c. Pono itaque $3x-b-c \infty a$, & fit $x \infty \frac{a+b+c}{3}$, pro valore meæ expectationis. Eodem modo invenitur, si ad a, b, c, aut d æqua sors mihi obtingat, id tanti valoris esse, quanti $\frac{a+b+c+d}{4}$. Atque ita porrò.

Annotat.

Aliter sic demonstrabitur: Fingamus, tres esse loculos, in quorum uno reconditum sit a, in altero b, in tertio c, mihique cum duobus aliis potestatem fieri, ut quisque pro se loculum accipiat, servetque quod inibi repererit: sic fiet, ut omnes tres accipiamus omnes loculos, habeamusque quicquid in iis reconditum est, scil. $a+b+c$; unde, cùm dici nequeat, unum altero potiorem spem vel expectationem habere, consequens est uniuscujusque expectationem seorsim æquivalere tertiæ parti hujus aggregati, vid. $\frac{a+b+c}{3}$. Eodem modo, si

do, si 4 sint loculi, in quibus abscondita sint a, b, c & d, mihique unus eorum in sortem cedere debeat, censebitur mea expectatio æquare 4^{tam} partem totius aggregati, sive $\frac{a+b+c+d}{4}$. Sic si 5 sint loculi, erit mea expectatio $\frac{a+b+c+d+e}{5}$, &c.

Cor. Patet etiam, si in uno pluribusvé loculis nihil sit absconditum, quòd tum similiter expectatio mea, ejus quod in reliquo vel reliquis continetur, futura sit pars tertia, si loculi sint tres, vel quarta si 4, vel 5^{ta} si 5, &c.

PROPOSITIO III.

SI numerus casuum, quibus mihi eveniet a, sit p; numerus autem casuum, quibus mihi eveniet b, sit q, sumendo omnes casûs æquè in proclivi esse: expectatio mea valebit $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Ad hanc regulam eruendam, ponatur rursus x pro valore expectationis meæ: ergo oportet me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse, ut ante, justo lusu. Ad hoc autem tot collusores sumam, ut unà mecum numerum ipsius $p+q$ efficiant, quorum deponat quisque x, ita ut depositum sit $px+qx$, & quisque sibi ludat æquâ expectatione ad vincendum. Porrò cum tot ex hisce collusoribus, quot indicat numerus q, sigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi sit daturus b, aut ego contra ipsi idem b, si vincam. Similiter cum reliquis collusoribus, constituentibus $p-1$ sigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus a, & ego tantundem (a scilicet) ipsi, si ego vincam. Et patet hunc lusum hâc conditione justum esse, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc q expectationes habere ad b, & $p-1$ expectationes ad a, & 1 expectationem (me nempe vincente) ad $px+qx-bq-ap+a$; tunc enim obtineo $px+qx$, id quod depositum est, de quo tradere debeo b unicuique q lusorum, & a unicuique $p-1$ lusorum, quæ simul conficiunt $bq+ap-a$. Si itaque $px+qx-bq-ap+a$ æquale esset ipsi a, haberem p expectationes ad a, (quandoquidem jam $p-1$ expectationes

tiones ad id habebam) & q expectationes ad b, & sic ad priorem meam expectationem rursus pervenissem. Quocircà pono $px + qx - bq - ap + a \infty a$, & fit $x \infty \frac{ap + bq}{p + q}$, pro valore expectationis meæ, omnino ut in initio positum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile est ostendere, me, si 11 habeam, rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Ludens enim contra 4 alios, & quisque nostrûm quinque deponens 11, cum duobus ex illis sigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi sit daturus 8, aut ego ipsi idem 8, si vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus 13, aut ego ipsi tantundem, si ego vincam. Qui quidem lusus justus est. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum si alteruter eorum, qui mihi 8 promiserunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum si alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut si ipse ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depositum, id est, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi relinquatur 13.

Annotat.

Aliter ita: Ponamus, tot unà mecum esse collusores, quot sunt in universum casûs, nimirum $p + q$, singulisque singulos evenire casûs; quod fit, si totidem concipiantur loculi, & in singulis reconditum intelligatur, quantum unoquoque casu acquiritur, videl. in singulis p loculorum a, & in singulis q loculorum b; singuli jam collusores accipiant singulos loculos, universi ergò accipient omnes, obtinebuntque infallibiliter quicquid in loculis reconditum est, id est, $pa + qb$. Igitur cùm omnes expectent æqualiter, distribuendum erit, quod universi accipient, per numerum collusorum seu casuum, sic ut singulorum expectatio fiat $\frac{pa + qb}{p + q}$. Atque eâdem ratione ostendetur, si mihi p casibus eveniat a, q casibus b, & r casibus c, sortem meam fore $\frac{pa + qb + rc}{p + q + r}$.

Coroll.

Coroll. 1. Constat hinc primò, si p casibus mihi eveniat a, & q casibus nihil, expectationem meam fore $\frac{pa}{p+q}$.

2. Constat deinde, si numeri casuum recipiant communem divisorem, posse valorem expectationis reduci ad minores terminos; ut, si a obtingat mihi casibus mp, & b casibus mq, fiet expectatio mea juxta regulam $\frac{mpa+mqb}{mp+mq}$, quæ factâ divisione per m æquivalet huic $\frac{pa+qb}{p+q}$.

3. Si habeam p casûs ad obtinendum a, q casûs ad b, & r ad c, tantundem hoc mihi valet, ac si p & q casibus in unum conflatis, haberem $p+q$ casûs ad $\frac{pa+qb}{p+q}$, & r casûs ad c; quia utroque modo per regulam invenitur sors mea $\frac{pa+qb+rc}{p+q+r}$.

4. Si habeam p casûs ad a, q ad b, & r casûs ad permanendum in eo statu, in quo sum, sive ad retinendam pristinam meam sortem, erit sors ista $\frac{pa+qb}{p+q}$, eadem planè quam haberem, si nullus r casuum adesset. Nam posito x pro valore ejus, habeo per hyp. p casûs ad a, q ad b, & r ad x, quod sortem meam per regulam efficit $\frac{pa+qb+rx}{p+q+r}$; unde cùm hæc mea sors vocetur x, erit $x \infty \frac{pa+qb+rx}{p+q+r}$, hoc est, factâ multiplicatione, $px+qx+rx \infty pa+qb+rx$, & deleto rx, $px+qx \infty pa+qb$, seu denique $x \infty \frac{pa+qb}{p+q}$.

5. Si habeam p casûs ad obtinendum a (quidpiam cujus ego semissem contuli), & q casûs ad obtinendum nihil, expectatio $\frac{pa}{p+q}$, quæ per Cor. 1. hujus invenitur, totum depositum respicit, & partem significat quæ mihi ex illo debetur, non quantitatem solius lucri vel damni: de hoc enim solo si quæstio sit, considero, quòd dum obtineo depositum a, lucrifacio tantùm $\frac{1}{2}a$; & dum obtineo nihil depositi, perdo $\frac{1}{2}a$, hoc est, acquiro $-\frac{1}{2}a$; unde sors mea hoc sensu accepta fit $\frac{p \cdot a:2 + q \cdot \overline{-a:2}}{p+q} \infty \frac{\overline{p-q} \cdot a:2}{p+q}$, & innuit lucrum, si p superet q; damnum, si hæc superet illam.

6. Si habeam p casûs ad acquirendum a, & q casûs ad obtinendum b, quorum quidem ego nihil contulero, attamen jactus aleæ mihi redimendus sit pretio n, expectatio mea $\frac{pa+qb}{p+q}$ iterum non tota in lucro ponenda est, sed priùs diminuenda valore n. Etenim cùm alteri do n, & ipse mihi vicissim reddit a vel b, perinde est, ac si ego nihil darem, acciperem verò tantùm $a-n$, vel $b-n$; id quod efficit expectationem meam ita restrictam $\frac{p.\overline{a-n}+q.\overline{b-n}}{p+q}$ $\infty \frac{pa+qb}{p+q}-n$, quæ rursus vel lucrum vel damnum significat, prout pars affirmata præpollet negatæ, aut hæc illi.

Schol. Perspicuum est ex calculi hujus consideratione, magnam illi intercedere affinitatem cum Regulâ Arithm. *Alligationis* dictâ, quâ res diversi pretii in datâ quantitate miscentur, & quæritur pretium rei mixtæ; aut potiùs calculum utrinque planè eundem esse. Sicut enim summa productorum ex quantitatibus singularum miscibilium in sua respectivè pretia, divisa per aggregatum omnium miscibilium, exhibet pretium quæsitum, quod semper medium est inter pretia extremorum: ita summa productorum ex numeris casuum in id quod quovis casu acquiritur, divisa per numerum omnium casuum, ostendit valorem expectationis, qui proinde semper intermedius erit inter maximum & minimum quod acquiri potest. Unde si iidem numeri assumantur, ibi pro quantitate miscibilium, eorumque pretiis; hîc pro casibus, & eo quod quovis casu obtinetur; idem quoque numerus denotabit ibi pretium rei mixtæ, & hîc expectationem. Ex. gr. si 3 canthari vini pretii 13 misceantur cum 2 cantharis pretii 8; multiplicatis 3 per 13 & 2 per 8, exurgit pretium omnium cantharorum 55, quo diviso per 5 numerum cantharorum, habetur 11 pretium unius canthari mixti: quanta quoque juxtà regulam expectatio cujuspiam æstimanda est, qui 3 habuerit casûs ad 13, & 2 ad 8.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SUmpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui priùs ter vicerit, quod depositum est, lucretur, & me jam bis vicisse, alterum verò semel. Scire cupio, si lusum prosequi non velimus, sed pecuniam, de quâ certamus, prout æquum est, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Ut igitur ad primò propositam quæstionem veniamus, nimirum, de faciendâ distributione inter diversos collusores, quando eorum sortes inæquales sunt, opùs est ut à facilioribus incipiamus.

Primò considerare oportet lusûs, qui utrobique deficiunt. A
Certum enim est, si inter nos convenerit, verbi gratia, ut quod depositum est lucretur *is*, qui priùs vigesies vicerit, & ego decies & novies vicero, at alter decies & octies, tantò meliorem fore eo casu sortem meam, quantò hîc melior est, ubi à tribus lusibus binos consequutus sum, ille verò unum duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodò lusus sed ipsi duo deficiunt.

Porrò ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum est quid fieret, si in lusu pergeremus. Certum enim est, si primum ludum vincerem, me præscriptum numerum impleturum & omne depositum consecuturum, id quod vocetur a. Quòd B
si autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriusque sors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeoque cederet cuique $\frac{1}{2}a$. Manifestum autem est, me æquam habere sortem ad primum ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua sit expectatio ad obtinendum a aut $\frac{1}{2}a$: quod ipsum per 1[mam] Propositionem tantum est ac si utriusque sortis dimidium, id est, $\frac{3}{4}a$, haberem; & relinquitur alteri meo collusori $\frac{1}{4}a$, quæ ipsius C
portio statim ab initio eodem modo reperiri potuisset. Unde patet, eum, qui ludum meum in se recipere vellet, mihi $\frac{1}{4}a$ pro eo D
tradere debere, ac proinde semper tria contra unum deponere eum E
posse, qui unum ludum vincere contendat, priusquàm alter duos vincat.

Annotat.

A *Primò considerare oportet lusûs, qui utrobique deficiunt.*] Adeoque in computandis sortibus solummodò futurorum lusuum, nulla præteritorum habenda est ratio; cùm pro unoquoque sequentium lusuum nulla major sit probabilitas, ut fortuna iisdem favere pergat, quibus favit anteà, quàm iis qui omnium fuêre infortunatissimi: quod observandum contra ridiculam plurimorum opinionem, qui fortunam ut nescio quem habitum considerant, qui aliquandiu in homine permaneat, eique jus quasi tribuat sperandi in posterum similem fortunam.

B *Id quod vocetur a.*] Per lit. *a* non solùm cum Auctore intelligere possumus depositam pecuniam, quæ inter collusores pro ratione sortium distribui potest; sed etiam in genere omne illud, quòd licèt indivisum est in se, concipi tamen potest ut divisibile pro numero casuum, quibus acquiri vel amitti, effici vel non effici potest, ut in ultimâ libri parte fusiùs ostendetur: putà, præmium quodcunque, laureola, victoria, status vel conditio personæ aut rei, munus quoddam publicum, opus quodcunque susceptum, vita vel mors, &c. Ita si duobus maleficis ex speciali gratiâ Principis æquâ sorte de vitâ decertandum sit, utervis eorum habere censebitur per I. Prop. $\frac{1}{2}$ vitæ & $\frac{1}{2}$ mortis, sic ut ejusmodi homo etiam in proprio sensu semi-vivus vel semi-mortuus nuncupari possit.

C *Et relinquitur alteri meo collusori $\frac{1}{4}$ a.*] Hoc est, residuum totius depositi *a*; quia scil. finito certamine ambo simul infallibiliter habituri sumus integrum *a*: at si fieri quodam casu posset, ut ambo ludentes impetrent plus minúsve integro *a*, evidens est, quòd tunc unius expectatio alterius expectationem nequeat complere ad *a*. Ex. gr. Si duo laqueo digni ludere cogantur tesserâ eâ lege, ut qui pauciora puncta jecerit suspendatur, altero manente vivo; si verò eundem jaciant punctorum numerum, ut ambo vitâ donentur; reperitur pro unius expectatione, ut suo loco patebit, $\frac{7}{12}$ *a* seu $\frac{7}{12}$ vitæ; unde tamen non sequitur alterius expectationem fore tantùm $\frac{5}{12}$ vitæ: cùm enim hic sortes manifestè sint æquales, expectabit & iste $\frac{7}{12}$ vitæ, proinde uterque simul $\frac{7}{6}$ vitæ, hoc est, plus

plus integrâ vitâ; quod inde fit, quia nullus quidem casus est, quo non finitâ aleâ unus minimùm superstes maneat, possunt tamen nonnullis casibus ambo vivi superesse.

Quæ ipsius portio statim ab initio &c.] Nempe hâc ratione: Si collusor meus proximum ludum vincat, æquata erit utriusque sors, proinde cedet cuique $\frac{1}{2}a$: sin ego vincam, obtinebit ille nihil. Cùm igitur pari facilitate obtinere possit $\frac{1}{2}a$ vel nihil, expectatio ejus per Coroll. 1. Prop. III. dicenda est $\frac{1}{4}a$. D

Ac proinde semper tria contra unum &c.] Ostendendum, quòd is qui tres habet casûs ad vincendum, & unum ad perdendum, seu qui tres quartas partes depositi expectat, tria possit deponere contra unum. Hunc in finem solummodò supponi debet, eum trium collusorum vicem sustinere. Etenim si sint 4 collusores, qui æquâ sorte ludant, & quorum singuli deponant 1, expectabit unusquisque id ipsum quod deposuit, hoc est, 4tam partem totius depositi, per Cor. 2. Prop. III. adeoque terni eorum quivis tres quartas partes depositi, & quartus non nisi $\frac{1}{4}$. Sed quia illi tres quoque tria deposuerunt, cùm quartus tantùm deposuerit unum, patet omnino justum esse, ut is, qui cupit in sortem trium succedere, hoc est, triplò plus expectare alio, triplò quoque plus deponat. Aliter ita: Qui tres habet casûs ad vincendum, & unicum ad perdendum, is toties ter vincere potest, quoties alter semel tantùm; proinde si lusus justus esse debet, oportet ut tribus ille vicibus tantundem lucri reportet, quantum alter unicâ vice; quod fieri nequit, nisi tria deponat contra unum. Et sic in genere ostendetur, quòd quantò quis altero potiorem ad vincendum expectationem habet, tantò etiam plus eum deponere justum sit, si æquâ sorte contendere velint. E

PROPOSITIO V.

POnamus unum mihi deficere ludum & collusori meo tres lusûs. Oportet hîc facere distributionem.

Advertamus itaque rursus, in quo essemus statu, si ego vel ipse primum vinceret lusum. Si ego vincerem, obtinerem depositum, id est, a; quòd si autem ille primum ludum vinceret, deficerent ipsi

duo lusûs & mihi unus, ac proinde in eodem statu essemus, qui in præcedenti Propositione positus fuit, mihique obtingeret $\frac{3}{4}a$, ut ibi ostensum est. Itaque pari facilitate vel a mihi obtinget vel $\frac{3}{4}a$, id quod tantum est, per 1mam Propositionem, ac $\frac{7}{8}a$. Et relinquitur $\frac{1}{8}a$ collusori meo; ita ut mea sors ad sortem illius se habeat, sicut 7 ad 1.

Quemadmodùm autem ad hunc calculum requisitus est præcedens, ita rursus hicce inservit sequenti: nimirum, si ponamus mihi unum ludum deficere & collusori meo 4or lusûs. Et invenitur eodem modo, mihi deberi $\frac{15}{16}$ istius quod depositum est, & ipsi $\frac{1}{16}$.

Annotat.

Ex progressione harum fractionum, $\frac{3}{4}a$, $\frac{7}{8}a$, $\frac{15}{16}a$, quæ per præced. & hanc Propositionem inventæ sunt, porrò infertur, si collusori meo deficiant ludi 5, fore sortem meam $\frac{31}{32}a$: si sex, $\frac{63}{64}a$: si septem, $\frac{127}{128}a$; & in genere, si mihi deficiat unus lusus & collusori meo ludi quotcunque, meam sortem fore ad sortem illius in eâ ratione, quam habet, demtâ unitate, productum binarii toties positi & multiplicati in se, quoties indicat numerus lusuum alteri deficientium, ad unitatem.

PROPOSITIO VI.

Ponamus mihi deficere duos lusûs & collusori meo tres lusûs.

Fiet itaque primo lusu; vel ut mihi unus lusus deficiat & ipsi tres (unde mihi per præcedentem Propositionem obtinget $\frac{7}{8}a$); vel ut cuique nostrûm adhuc duo lusûs deficiant, unde mihi debebitur $\frac{1}{2}a$, quandoquidem sic utrique æqua sors futura est. Est mihi autem æqualis facilitas ad primum ludum vincendum aut perdendum; ita ut mihi æqua sit expectatio ad obtinendum $\frac{7}{8}a$ aut $\frac{1}{2}a$, id quod mihi valet $\frac{11}{16}a$, per 1mam Propositionem. Et debentur mihi 11 partes ejus quod depositum est, & collusori meo 5 partes.

PRO-

PROPOSITIO VII.

POnamus mihi deficere duos lusûs & collusori meo quatuor.

Fiet itaque, ut, si primum ludum vincam, unum ludum vincere debeam & alter quatuor; vel, si eundem perdam, duos & alter tres. Ita ut æqua mihi sors obtingat ad $\frac{15}{16}a$ aut $\frac{11}{16}a$, id quod tantum valet ac $\frac{13}{16}a$, per 1^mam^ Propositionem. Unde patet, eum F meliorem habere sortem, qui duos lusûs vincere debet dum alter quatuor, quàm eum, qui unum dum alter duos. In hoc enim posteriori casu, nimirum ipsius 1 ad 2, portio mea, per 4^tam^ Propositionem, est $\frac{3}{4}a$, quæ minor est quàm $\frac{13}{16}a$.

Annotat.

Unde patet eum meliorem &c.] Sic adhuc meliorem F sortem habet, qui tres lusûs vincere debet, dum alter sex; reperitur enim ejus portio $\frac{219}{256}a$, major quàm $\frac{13}{16}a$. Ita etiam, qui unum ludum vincere suscipit dum alius quatuor, non parem subit fortunam cum illo, qui duos vincere debet dum alter octo; sed cum illo, qui duos vincere tenetur dum alter sex: quanquam nemo fortassis est, qui sibi non persuaderet, eandem inter sortes rationem obtinere debere, ubi numeri lusuum utrobique deficientium eandem quoque inter se rationem servant; nisi nos calculus aliud docuisset. Quo ipso proin monemur, ut cauti simus in judicando, nec ratiocinia nostra super quâcunque statim analogiâ in rebus deprehensâ fundare suescamus; quod ipsum tamen etiam ab iis, qui vel maximè sapere videntur, nimis frequenter fieri solet.

Cœterùm lubet hîc Tabulam adjicere pro duobus collusoribus, qualem infra in Propos. IX. pro tribus subjungit Auctor:

Tabu-

Tabula pro 2 colluſoribus.

Luſûs deficientes Colluſoris A		Colluſoris B 1	2	3	4	5	6	7
1		1 : 2	3 : 4	7 : 8	15 : 16	31 : 32	63 : 64	127 : 128
2	Sortes Col.u	1 : 4	4 : 8	11 : 16	26 : 32	57 : 64	120 : 128	247 : 256
3		1 : 8	5 : 16	16 : 32	42 : 64	99 : 128	219 : 256	466 : 512
4	ſoris A.	1 : 16	6 : 32	22 : 64	64 : 128	163 : 256	382 : 512	848 : 1024
5		1 : 32	7 : 64	29 : 128	93 : 256	256 : 512	638 : 1024	1486 : 2048
6		1 : 64	8 : 128	37 : 256	130 : 512	386 : 1024	1024 : 2048	2510 : 4096
7		1 : 128	9 : 256	46 : 512	176 : 1024	562 : 2048	1586 : 4096	4096 : 8192
8		1 : 256	10 : 512	56 : 1024	232 : 2048	794 : 4096	2380 : 8192	6476 : 16384
9		1 : 512	11 : 1024	67 : 2048	299 : 4096	1093 : 8192	3473 : 16384	9949 : 32768

Tabella hæcce leviſſimo negotio quouſque opus fuerit continuabitur, in ſupremâ quidem ſerie transverſali per ea quæ ad Propoſ. 5 annotata ſunt; in primâ ſerie perpendiculari per continuam biſectionem dimidii; in locis intermediis per dimidiationem ſummæ duarum areolarum immediatè præcedentium in eâdem ſerie perpendiculari & transverſali; cujus conſtructionis ratio ex dictis plus ſatis perſpicua eſt. Quomodo autem expectationes duorum ludentium abſque continuatione Tabellæ indefinitè ad quotvis deficientes luſûs exhiberi poſſint; infra in Appendice Cap. 4. Part. II. oſtendetur.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

NUnc verò ponamus tres esse collusores, quorum primo ut & secundo unus lusus deficiat, sed tertio duo lusûs.

Ut igitur inveniatur primi pars, rursus advertendum est, quid ipsi deberetur, si vel ipse vel alter reliquorum duorum primum lusum vinceret. Si ipse vinceret, haberet depositum, id quod sit a. Quòd si secundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam secundus sic lusui finem imposuisset. At si tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret lusus, ideoque tam primo quàm utrique reliquorum deberetur $\frac{1}{3}a$. Et sit primo una expectatio ad a, una ad o, & una ad $\frac{1}{3}a$, (quandoquidem æquè facilè contingere potest cuique trium ut primum ludum vincat,) quod ipsi tantundem valet ac $\frac{4}{9}a$, per 2dam Propositionem. Et sit similiter secundo $\frac{4}{9}a$, & remanet tertio $\frac{1}{9}a$. Cujus pars separatim etiam inveniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari. G

Annotat.

Cujus pars separatim etiam inveniri potuerat.] Nempe hoc pacto: Si ipse sequentem ludum vinceret, expectatio ejus foret $\frac{1}{3}a$; sed si vel primus vel secundus proximi ludi victor evaderet, tertius nihil haberet: quare unum casum habet ad $\frac{1}{3}a$, & duos ad o; id quod ipsi per Coroll. 1. Prop. III. valet $\frac{1}{9}a$. G

PROPOSITIO IX.

UT tot collusorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores lusûs deficiunt, cujusque pars inveniatur, considerandum est, quid illi, cujus partem invenire volumus, deberetur, si vel ipse, vel quilibet reliquorum primum sequentem ludum vinceret. Hæ autem partes si in unam summam colligantur, & aggregatum per numerum collusorum dividatur, quotiens ostendet unius quæsitam partem.

Ponamus tres esse collusores A, B, & C, & ipsi A unum ludum deficere, ipsi B duos lusûs, & ipsi C similiter duos lusûs. Invenire oportet, quid ipsi B, ejus quod depositum est, debeatur. Id quod vocetur q.

Primò examinandum est, quid ipsi B deberetur, si vel ipse, vel A, vel C primum sequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem imposuisset, ac per consequens ipsi B deberetur o. Si ipse B vinceret, deficeret illi adhuc unus lusus, & ipsi A unus lusus, at ipsi C duo lusûs. Quocirca ipsi B hoc in casu deberetur $\frac{4}{9}q$, per 8vam Propositionem.

Denique si C primum sequentem ludum vinceret, tunc ipsis A & C singulis unus deficeret lusus, sed ipsi B duo lusûs, ac per consequens ipsi B deberetur $\frac{1}{9}q$, per eandem Propositionem 8vam. Nunc autem in unam summam colligendum est, id quod in tribus hisce casibus ipsi B deberetur: nimirum, o, $\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$: quorum summa est $\frac{5}{9}q$. Quod ipsum divisum per 3, numerum collusorum, dat $\frac{5}{27}q$. Quæ ipsius B quæsita pars est. Demonstratio autem hujus patet ex 2dâ Propositione. Quoniam enim B æquam habet sortem ad obtinendum o, $\frac{4}{9}q$, vel $\frac{1}{9}q$, habet per 2dam Propositionem tantundem ac $o+\frac{4}{9}q+\frac{1}{9}q:3$, id est, $\frac{5}{27}q$. Et certum est, hunc divisorem 3 esse numerum collusorum.

Ut autem inveniatur, quid cuipiam debeatur in quolibet casu, videlicet si vel ipse vel aliquis reliquorum primum sequentem ludum vincat: oportet simpliciores casûs primò investigare, & horum medio sequentes. Nam sicut hic ultimus casus solvi non potuit, priusquàm ille octavæ Propositionis calculo subductus esset, in quo deficientes lusûs erant 1, 1, 2, ita etiam cujusque pars supputari nequit in tali casu, ubi deficientes lusûs sunt 1, 2, 3, quin primùm calculo subductus sit casus deficientium lusuum 1, 2, 2, quemadmodùm jam fecimus, & prætereà ille, in quo lusus deficientes sunt 1, 1, 3; qui similiter per 8vam Propositionem supputari potuisset. Atque hoc quidem pacto consequenter supputare licet casûs omnes, qui in sequenti tabulâ comprehenduntur, & infinitos alios.

Tabu-

Tabula pro 3 colluſoribus.

Luſus qui ipſis deficiunt	1. 1. 2	1. 2. 2	1. 1. 3	1. 2. 3
Eorum partes	4. 4. 1	17. 5. 5	13. 13. 1	19. 6. 2
	9	27	27	27

Luſus qui ipſis deficiunt	1. 1. 4	1. 1. 5	1. 2. 4	1. 2. 5
Eorum partes	40. 40. 1	121.121. 1	178. 58. 7	542. 179. 8
	81	243	243	729

Luſus qui ipſis deficiunt	1. 3. 3	1. 3. 4	1. 3. 5
Eorum partes	65. 8. 8	616. 82. 31	629. 87. 13
	81	729	729

Luſus qui ipſis deficiunt	2. 2. 3	2. 2. 4	2. 2. 5	2. 3. 3	2. 3. 4	2. 3. 5
Eorum partes	34. 34. 13	338.338.53	353.353.23	133. 55. 55	451.195.83	1433.635.119
	81	729	729	243	729	2187

DE TESSERIS.

QUod ad Tesseras attinet, de iis hæ quæstiones proponi possunt: videlicet, quotâ vice unâ tesserâ senarium jacere periclitandum sit, aut aliquod reliquorum punctorum. Item quotâ vice duos senarios duabus tesseris, aut tres senarios tribus tesseris jacere sit tentandum. Et plures aliæ hujusmodi quæstiones.

Ad quas solvendas advertendum est. Primò unius tesseræ sex esse jactûs diversos, quorum quivis æquè facilè eveniat. Sumo enim tesseram habere figuram cubi perfectam. Porrò duarum tesserarum 36 esse diversos jactûs, quorum similiter quivis æquè facilè obtingere potest. Nam ratione cujusque jactûs unius tesseræ potest unus sex jactuum alterius tesseræ simul contingere. Et sexies 6 efficiunt 36 jactûs. Item trium tesserarum esse 216 jactûs diversos. Nam ratione cujusque 36 jactuum duarum tesserarum potest unus sex jactuum, qui in 3tia sunt, evenire. Et sexies 36 efficiunt 216 jactûs. Eodem modo patet, quatuor tesserarum jactûs esse sexies 216, id est, 1296; atque sic ulteriùs jactûs quotlibet tesserarum supputari posse, sumendo semper pro accessione unius tesseræ sexies jactûs præcedentis.

Porrò notandum, duarum tesserarum unum duntaxat esse jactum, qui 2 aut 12 puncta efficiat, duos verò jactûs, qui 3 aut 11 puncta efficiant. Si enim tesseras vocemus A & B, patet, ad 3 puncta jacienda in A unum & in B duo, vel in B unum & in A duo puncta reperiri posse. Similiter ad 11 puncta jacienda in A quinque & in B sex, vel in A sex & in B quinque puncta patêre posse. Quatuor punctorum tres sunt jactûs, videlicet, ipsius A 1 & B 3 puncta, vel ipsius A 3 & B 1 punctum; vel ipsius A 2 & B 2 puncta.

Decem punctorum similiter tres sunt jactûs.
Quinque vel novem punctorum 4or sunt jactûs.
Sex vel octo punctorum 5que sunt jactûs.
Septem punctorum 6 sunt jactûs.

In

In tribus tesseris reperiuntur … punctorum … jactûs.

Punctorum	Jactûs
3 vel 18	1
4 vel 17	3
5 vel 16	6
6 vel 15	10
7 vel 14	15
8 vel 13	21
9 vel 12	25
10 vel 11	27

Annotat.

Quod hîc Auctor præstitit in duobus & tribus tesseris, præstari quoque potest in quatuor quinque pluribúsve, in quibus numeri jactuum quotvis punctorum haud aliter invenientur. At quia facilè fieri potest, præsertim ubi tesseræ multæ fuerint, ut quamplurimi jactûs prætereantur, nisi aliquem in iis inquirendis ordinem observes, ostendam quâ quis methodo uti debeat, ut certus esse possit, se omnes adinvenisse nullo prætermisso. Primò inquirendum, quot modis diversis componi possit propositus punctorum numerus, ex tot partibus quot sunt tesseræ, quarumque partium nulla senarium superet: deinde explorandum, quot jactûs cuilibet horum modorum respondeant; quæ quidem omnia meliùs exemplis quàm regulis addisci possunt: Esto itaque indagandum, quot jactûs reperiantur 12 punctorum in 4 tesseris.

Hunc in finem incipio à 4 unitatibus, scribendo 1.1.1.1, deinde primam unitatem adaugeo continuâ additione unitatum, quousque senarium efficiant & habeatur 6.1.1.1; sed quia summa horum numerorum nondum exæquat numerum propositum 12, attollo etiam secundam partem ad binarium, ad ternarium, scribendo 2.2.1.1, deinde 3.3.1.1, singulisque vicibus primum numerum ad senarium elevo, ut habeantur 6.2.1.1, & 6.3.1.1, quorum summæ adhuc à proposito numero deficiunt: quare pergo scribere 4.4.1.1, primoque quaternario ad senarium elevato habebo tandem 6.4.1.1, quorum summa æqualis 12; quare seorsim illos adnoto: posteà scribo 5.5.1.1, quos quia pariter 12 efficiunt, iterum reservo. Jam quia 6.5.1.1, uti & 6.6.1.1, excedunt 12,

illis neglectis tertiam quoque unitatem, quæ hactenùs intacta mansit, ad binarium elevo, scribendo 2.2.2.1, sed quia primo binario ad senarium promoto numeri 6.2.2.1, deficiunt adhuc à 12, transeo ad 3.3.2.1, quorum primus pro more adauctus exhibet numeros 6.3.2.1, seorsim ponendos, quia complent 12: Deinde solummodò secundam partem augeo, primam verò minuo unitate, & habebo alios quatuor 5.4.2.1 seorsim adnotandos. Jam non pergo attollere secundam partem ad 5 vel 6arium, quia ad complendum 12 deprimenda esset prima ad 4 vel 3arium, & sic præcedentes quidam modi redirent; nam ad hoc cavendum semper opus est, ut nulla partium priorum minor constituatur ullâ sequentium: quocirca statim propero ad 3.3.3.1, ubi mutato primo ternario in quinarium obtineo numeros 5.3.3.1 constituentes summam propositam. Mox verò secundâ parte sublatâ & primâ depressâ ad quaternarium, habebo alios quatuor numeros quæsito satisfacientes 4.4.3.1. Porrò quia manifestum est, neutram duarum priorum partium, imò nec ipsam tertiam partem unitate posse augeri, quin vel summa omnium quatuor excedat 12, vel aliqua præcedentium partium minor fiat aliquâ subsequentium, & sic pristini quidam modi redeant; idcircò postremam etiam unitatem, quam hactenùs intactam reliqui, ad binarium promoveo scribendo 2.2.2.2, primoque binario ad 6arium sublato, 6.2.2.2, qui modus quæsito satisfacit. Hinc secundam partem augeo, primam minuo, tum unitate, tum binario, & habebo duos alios modos requisitos 5.3.2.2, & 4.4.2.2. Ubi quia denuò apparet, neutram priorum partium posse augeri, quin vel altera minuatur, & sic pristini resultent modi; vel summa omnium superet 12; progredior ad 3.3.3.2, sive aucto unitate primo ternario ad 4.3.3.2, qui novum modum suppeditant, quo componi potest numerus propositus. Tandem quoniam ob eandem rationem nullam trium priorum partium ampliùs augere licet, postrema ad ternarium elevanda scribendumque 3.3.3.3, quorum summa & ipsa æquat 12; quo facto non fas est ulteriùs progredi, quandoquidem postremus terminus augeri nequit, quin aliquis priorum diminuatur, & sic redire faciat unum præcedentium modorum. Quapropter constat, nullos dari alios modos, quibus componi possit numerus 12 ex quatuor aliis, quorum singuli

guli ſenarium non ſuperant; præter undecim hactenùs enumeratos, quos eo ordine quo ſeſe offerebant, adjuncto laterculo inſertos conſpicis. Haud abſimili autem ratione recenſere poterimus omnes modos poſſibiles, quibus evenire poteſt quilibet alius punctorum numerus in tot teſſeris quot quis voluerit, dummodò advertamus, primæ teſſeræ puncta continuâ adjectione unitatis elevanda eſſe ad ſenarium, priusquàm puncta ſecundæ augeantur ſolâ unitate, & puncta pariter ſecundæ attollenda ad ſenarium, priusquàm puncta tertiæ augeantur unitate, & puncta tertiæ, priusquàm puncta 4tæ, & 4tæ priusquàm 5tæ, & ita deinceps.

Modi	*Jactûs.*
6. 4. 1. 1	12
5. 5. 1. 1	6
6. 3. 2. 1	24
5. 4. 2. 1	24
5. 3. 3. 1	12
4. 4. 3. 1	12
6. 2. 2. 2	4
5. 3. 2. 2	12
4. 4. 2. 2	6
4. 3. 3. 2	12
3. 3. 3. 3	1
Summa Jactuum	125

Hoc peracto, aliud ſupereſt negotium in eo conſiſtens, ut exploretur numerus jactuum ſingulorum modorum; nam ſingulis horum modorum plures iterum reſpondere poſſunt jactûs, prout hic vel ille numerus in hâc illâvé teſſerâ conſpici poteſt. Ita ſi quatuor teſſeræ vocentur A, B, C, & D, patet ad primum modum efficiendum 6.4.1.1, poſſe vel in A 6, & in B vel C vel D 4; vel in B 6, & in A vel C vel D 4, &c. puncta reperiri: unde tot reſultabunt jactûs, quoties iſti 4 numeri diverſo ordine locari poſſunt; quod de reliquis modis pariter intelligendum. Poſſunt verò numeri 6.4.1.1, quorum duo ſunt diverſi, duo iidem, locum inter ſe permutare duodecies: ſequentes 5.5.1.1, quorum duo priores, ut & poſteriores duo ſunt iidem, non niſi ſexies: ſequentes verò 6.3.2.1, qui omnes inter ſe differunt, vicies quater; uti conſtabit ex Doctrinâ de Permutationibus & Combinationibus, quam parte ſecundâ pertractandam ſuſcepi. Hi jactûs unà cum jactibus reliquorum modorum in unam ſummam collecti efficiunt 125, numerum indigitantem omnes quotquot dari poſſunt jactûs 12 punctorum in 4 teſſeris. Quod ipſum indagandum erat.

Verùm enimverò quoniam hæc methodus ſupputandi numerum jactuum in pluribus teſſeris, ſupra modum tædioſa & prolixa eſt,

eſt, oſtendam porrò, quâ arte idem conſequi poſſimus non tantùm pro certo punctorum numero, ſed pro omnibus omninò punctis, beneficio appoſitæ Tabulæ, quæ & expeditè admodùm conſtrui poteſt, & naturam progreſſionemque, quam numeri jactuum inter ſe ſervant, apertiùs ob oculos ponit. Conſtructio talis eſt: Scribantur ordine numeri omnium punctorum quotquot teſſeræ recipere poſſunt à minimo ad maximum, putà, 4.5.6.7 &c. uſque ad 24 pro teſſeris quatuor; aut 5.6.7.8 &c. uſque ad 30 pro teſſeris quinque, &c. & ſub eorum ſex primis collocentur ſex unitates, quibus ſubjungantur ſex aliæ unitates, & his iterum ſex aliæ, idque fiat ſexies, promovendo ſingulis vicibus earum primam unò gradu versùs dextram: quo facto addendæ quæ in eâdem ſerie perpendiculari ſibi invicem reſpondent, ut fiant numeri 1.2.3.4 &c. Horum deinde numerorum ſex quoque conſtituendi ſunt ordines, ita ut ſequentium quilibet præcedenti uno puncto anterior fiat; & tum addendi, ut prodeant numeri 1.3.6.10 &c. Hi iterum ſexies gradatim ponendi & addendi; idque tamdiu continuandum eſt, donec tot ex ultimâ additione reſultantes habeantur numeri, quot reperiuntur diverſa puncta in propoſito teſſerarum numero; ſignificabuntque numeri ſinguli punctorum ſibi reſpondentium jactûs. Ita 4 teſſerarum jactus unus eſt, qui 4 aut 24 puncta producit, quatuor jactûs, qui 5 aut 23, decem qui 6 aut 22, viginti qui 7 aut 21 puncta efficiunt &c. Rationem hujus conſtructionis attendenti percipere haud difficile eſt: Cùm enim ſingulæ accedentes teſſeræ jactûs præcedentium ſextuplicent, manifeſtum eſt, cur numeri jactuum præcedentium teſſerarum ſexies repetendi & addendi ſint; & quia numeri punctorum, qui ſingulis iſtis jactibus reſpondent, augentur unitate, vel binario, vel ternario &c. prout in accedente teſſerâ vel unum, vel duo, vel tria &c. inveniuntur puncta, patet etiam, cur ſeries iſta jactuum ſingulis vicibus uno gradu dextrorſum promovenda ſit, nimirum ut hâc ratione cuilibet jactuum numero reſpondeat numerus punctorum unitate major, quàm eidem reſpondebat in ſerie præcedente.

Nota, non omnes punctorum numeros pro 5 & ſex teſſeris ob ſpatii defectum apponi potuiſſe; ſed facilè ſupplentur, qui deſunt, ex parallelis: nam bini punctorum numeri ab extremis æqualiter

remoti

Tessera:

Num. jad
pro Tesser

remoti (quos parallelos voco) æquali ſemper jactuum numero gaudent.

Non inopportunum erit hic loci indigitare, cùm id ſcire nonnunquam interſit, quot jactibus effici poſſint in tribus teſſeris puncta triplicata vel duplicata, (Galli vocant *raſles* & *doublets*) hoc eſt, quoties contingere queat, ut vel in omnibus tribus, vel ſaltem in duabus teſſeris, reperiatur æqualis punctorum numerus: Liquet verò, unum tantùm eſſe jactum, quo produci poſſunt tres ſenarii, item unum quo tres quinarii, unum quo tres quaternarii &c. adeoque non niſi *6* punctorum triplicatorum jactûs exiſtere poſſe. Sed contra 15 ſunt jactûs, quibus duo ex. gr. ſenarii contingere poſſunt: etenim ſi teſſeræ vocentur A, B, & C, fieri poteſt, ut duo illi ſenarii reperiantur vel in teſſeris A & B, vel in A & C, vel in B & C, quod tres caſûs efficit: ac deinde ratione cujusque horum caſuum jactus tertiæ teſſeræ, in quâ diverſus punctorum numerus conſpici debet, variari poteſt quinquies; unde quinquies tres ſeu 15 exiſtunt duorum ſenariorum jactûs; quod cùm idem de duobus quinariis, quaternariis & reliquis intelligendum, ſequitur punctorum duplicatorum eſſe ſexies quindecim ſeu 90 jactûs: Proinde cùm trium teſſerarum jactûs in univerſum exiſtant 216, erunt reliqui 120 jactûs ſimplices, quorum numerus etiam initio inveſtigari potuiſſet.

PROPOSITIO X.

INvenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut unâ teſſerâ 6 puncta jaciat.

Si quis primâ vice ſenarium jacere contendat, apparet unum eſſe caſum, quo vincat, habeatque id, quod pignoris loco depoſitum eſt; quinque verò eſſe caſûs, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactûs contra ipſum, & tantùm unus pro ipſo. Quod autem depoſitum eſt vocetur *a*. Eſt itaque ipſi unica expectatio ad obtinendum *a*, ſed quinque ad obtinendum o; id quod per 2dam Propoſitionem tantundem valet ac $\frac{1}{6}a$. Et manet pro eo qui ipſi hunc caſum offert $\frac{5}{6}a$. Ita ut tantummodo 1 contra 5 deponere poſſit, qui primâ vice ſuſcipere velit.

Qui duabus vicibus ſemel ſenarium jacere certet, ſors ejus hoc pacto computatur. Si primâ vice 6 jaciat, obtinet *a*. Si diverſum eveniat, unus ipſi reſtat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum $\frac{1}{6}a$. Atqui ut primâ vice 6 jaciat, unus tantùm caſus eſt, & quinque casûs, quibus diverſum eveniat. Itaque ab initio unus caſus eſt, qui det ipſi *a*; & quinque qui dent $\frac{1}{6}a$, id quod per 2dam Propoſitionem valet $\frac{11}{36}a$. Unde contracertanti luſori cedit reliquum $\frac{25}{36}a$; adeò ut ſors utriusque ſive æſtimatio expectationis eam ſervet rationem, quam 11 ad 25; id eſt, minus quàm 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo ſubducitur, quòd ſors ejus, qui tribus vicibus ſemel ſenarium jacere ſuſcipit, ſit futura $\frac{91}{216}a$; ita ut 91 contra 125 deponere poſſit; id eſt, paulò minus quàm 3 ad 4.

H Qui quatuor vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{671}{1296}a$; ita ut 671 contra 625 deponere poſſit; id eſt, plus quàm 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{4651}{7776}a$, & poteſt 4651 contra 3125 deponere; id eſt, paulò minus quàm 3 ad 2.

Qui ſex vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{31031}{46656}a$, & poteſt 31031 contra 15625 deponere; id eſt, paulò minus quàm 2 ad 1.

Atque ita conſequenter quilibet jactuum numerus inveniri poteſt. Sed licet majori compendio progredi, ut in ſequenti Propoſitione oſtendetur; ſine quo calculus aliàs multò prolixior foret.

Annotat.

H *Qui quatuor vicibus idem ſuſcipit, &c.*] Subiit aliquando cogitatio, poſſe fortè quempiam calculum Auctoris tali diſcurſu ſuſpectum reddere: *Si quis quatuor jactibus ſenarium jacere contendens, æquam circiter ad vincendum ac perdendum expectationem habeat, hoc eſt, æquè facilè vincat ac perdat, fiet ut aliquandiu ludens toties vincat quoties perdit, ſi & pari fortunâ utatur; adeoque ut è quaternis jactibus toties unus ſenarius exiſtat, quoties è quaternis aliis nullus: quare in octonis jactibus unus reperietur ſenarius, ac proinde in ſexcentis verb. gr. jactibus ſenarii 75. Sunto jam ſex alii, qui eâ conditione ludant, ut primus vincat, ſi unum punctum jaciatur, ſecundus ſi duo, tertius ſi tria &c. quo utique* pacto

pacto æquâ sorte certabunt; sed ludant etiam pari fortunâ, sic fiet necessariò, ut in sexcentis jactibus centum eveniant senarii: idcircò cùm æquâ sorte & pari fortunâ luditur, in sexcentis jactibus senarii prodibunt centum & pauciores quàm centum, quod absurdum. Huic fallaciæ ut satisfiat, pono quidem, quòd ubi æquâ fortunâ luditur, ibi in jactibus 600 evenire debent senarii centum; sed nego, quòd si quis quaternis jactibus semel senarium jacere certaverit, propterea quatuor jactibus ad vincendum opus habeat; potest enim vel primus, vel secundus, vel tertius jactus senarius existere, quo casu reliqui jactûs sequenti quaternario annumerantur; sic ut pauciores quàm octo ad semel vincendum ac perdendum sufficere possint. Id verò quo pacto huc quadret, sic ostendo: Fingo, in omnibus jactuum quaternariis, qui me ludi victorem reddunt, primum quemque jactum senarium existere; sic centies vincendo non nisi centum jactûs insumuntur, reliqui 500 per 4 divisi indigitant me 125ies perditurum. Si verò illorum quaternorum jactuum postremus quisque senarius foret, vincendo centies 400 jactûs absumerentur, residuis tantùm ducentis, qui ostenderent me quinquagies perditurum. Quocircà cùm nonnullis casibus sæpiùs perderem quàm vincerem, aliis pluries vincerem quàm perderem, colligo fieri benè posse, ut hâc conditione æquâ sorte certetur. Contra verò, si quis tribus vicibus semel senarium jacere suscipiat, is quidem aliquot casibus toties vinceret quoties perderet, nempe si tertius quivis jactus senarius existeret; aliis multò pluries perderet quàm vinceret, si nim. primus quisque senarius foret; sed nullo casu sæpiùs vinceret quàm perderet: unde constare liquidò potest, neminem nisi cum detrimento tali conditione certare posse. Quæ quidem eum in finem hîc adduco, ut palàm fiat, quàm parùm fidendum sit ejusmodi ratiociniis, quæ corticem tantùm attingunt, nec in ipsam rei naturam altiùs penetrant; tametsi in toto vitæ usu etiam apud sapientissimos quosque nihil sit frequentius.

PROPOSITIO XI.

INvenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut duabus tesseris 12 puncta jaciat.

Si quis primâ vice duos ſenarios jacere contendat, apparet unum eſſe caſum, quo vincat, id eſt, ad obtinendum a; & 35 eſſe caſûs, quibus perdat ſive nihil habeat, quoniam 36 ſunt jactûs. Itaque habet per 2[dam] Propoſitionem $\frac{1}{36}a$.

Qui duabus vicibus idem ſuſcipit, ſi primâ vice duos ſenarios jaciat, obtinebit a; ſi verò primâ vice diverſum eveniat, unus ipſi reſtat jactus, id quod ipſi, per illud quod jam dictum eſt, valet $\frac{1}{36}a$.

Atqui ut primâ vice duos ſenarios jaciat, unus tantùm eſt caſus, ſed 35 caſûs, quibus diverſum eveniat. Itaque ab initio unus caſus eſt, qui det ipſi a, & 35 qui dent $\frac{1}{36}a$; id quod per 2[dam] Propoſitionem valet $\frac{71}{1296}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1225}{1296}a$.

Ex his invenire licet, qualis ſit ei ſors aut pars, qui idem ſuſcipit quaternis jactibus, prætereundo caſum eum, cùm quis illud ternis jactibus ſuſcipit.

Etenim, qui 4[or] vicibus duos ſenarios jacere contendit, ſi illud 1[mâ] aut 2[dâ] vice faciat, obtinet a; ſin minùs, reſtant ipſi duo jactûs, qui per illud quod ſuperiùs dictum eſt, valent $\frac{71}{1296}a$. Sed
I propter eandem rationem habet etiam 71 caſûs, ut ex duobus primis jactibus ſemel duos ſenarios jaciat, contra 1225 caſûs, quibus diverſum eveniat. Habet itaque ab initio 71 caſûs, qui ipſi dent a, & 1225 caſûs, qui dent ipſi $\frac{71}{1296}a$. Quod ipſi per 2[dam] Propoſitionem valet $\frac{178991}{1679616}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1500625}{1679616}a$. Id quod oſtendit eorum ſortes eſſe ad ſe invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porrò eâdem ratione invenitur expectatio ejus, qui 8 vicibus ſemel duos ſenarios jacere certat. Ac inde rurſus expectatio ejus, qui idem ſuſcipit 16 vicibus. Atque ex hujus expectatione, ut etiam ex expectatione illius, qui iſtud 8 vicibus ſuſcipit, invenitur expectatio ejus, qui illud 24 vicibus in ſe recipit. In quâ operatione, quoniam præcipuè quæritur in quo numero jactuum æqualis ſors incipiat, inter eum qui id ſuſcipit & eum qui offert, licebit à numeris, qui alioquin in immenſum excreſcerent, poſte-
K riores aliquot characteres auferre. Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus ſuſcipit, adhuc aliquid deficere; tumque demum eum potiorem conditionem inire, cùm 25 jactibus aggreditur.

Anno-

Annotat.

Sed propter eandem rationem habet etiam 71 *casûs &c.*] I
Juvat hîc observare, quod Auctor supponit, expectationem quamcunque fractione expressam considerari etiam posse tanquam resultantem ex tot casibus ad obtinendum depositum a, quot indigitat numerator fractionis, & tot casibus ad nihilum, quot significat differentia inter illum & denominatorem; tametsi fortâssis aliter ad expectationem illam perventum fuerit: Sic quanquam ille, qui duabus vicibus duos senarios jacere suscipit, ad expectationem suam $\frac{71}{1296}a$ perveniat per 1 casum ad a, & 35 casûs ad $\frac{1}{36}a$; nihilominùs censeri etiam poterit eam sibi acquirere per 71 casûs ad a, & 1225 casûs ad o. Quoniam habens 71 casûs ad a, & 1225 ad o, habet hanc expectationem $\frac{71}{1296}a$; & qui plures casûs ad a haberet ac pauciores ad nihilum, aut vice versâ, ejus quoque expectatio contra hypoth. major minorvè foret, quàm $\frac{71}{1296}a$, per Coroll. 1. Proposit. III.

Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 *vicibus suscipit &c.*] K
In præced. Propos. adstruxit Auctor, posse quatuor jactibus cum lucro suscipi, ut unâ tesserâ senarius jaciatur; nunc asserit, nondum illud 24 jactibus posse, ut duabus tesseris duo jaciantur senarii; quæ multis planè videbuntur ἀσύστατα, cùm 24 jactûs ad omnes 36 jactûs duarum tesserarum eandem præcisè rationem servent, quam 4 jactûs ad omnes sex jactûs unius tesseræ. Eâdem olim difficultate constrictus hæsit, referente Pascalio in literis ad Fermatium, quæ hujus operibus Tolosæ A°. 1679. impressis pagin. 181. insertæ leguntur, Anonymus quidam cæterà subacti judicii Vir, sed Geometriæ expers. Hâc enim qui imbuti sunt, ejusmodi ἐναντιοφανείας minimè morantur, probè conscii dari innumera, quæ admoto calculo aliter se habere comperiuntur, quàm initio apparebant; ideoque sedulò cavent, juxtà id quod semel iterumque monui, ne quicquam analogiis temerè tribuant.

Ad Propositionem in genere:

Si pro numeris literas substituisset Auctor, potuisset hanc & præcedentem Propositionem uno Problemate complecti, ejusque solutionem generalem pari facilitate investigare, hoc pacto: Ponatur $a \propto b + c$ pro numero omnium casuum, qui reperiuntur in unâ pluribusvé tesseris, aut in quâvis aleâ, (cùm hæc non magis tesseris applicari debeant, quàm quibusvis sortitionibus aliquoties reiterandis, & in quibus numerus casuum perpetuò constans idemque manet) b verò sumatur pro numero casuum, quibus præscriptus punctorum numerus obtinetur, seu quibus obtinetur quod susceptum est; & c pro numero casuum, quibus illud non obtinetur, seu quibus non præstatur quod intenditur.

Jam si quis primâ vice suscipiat præstare aliquid, patet, eum habere b seu $a - c$ casûs ad illud præstandum, hoc est, ad obtinendum depositum, quod nunc sit 1, & c casûs ad obtinendum 0; quare ejus sors per Cor. 1. Prop. III. fit $\frac{a-c}{a}$: Si quis duabus vicibus illud suscipiat, rursus habet $a - c$ casûs ad 1 vel $\frac{a}{a}$, sed c casûs quibus pertingit ad præcedentem expectationem $\frac{a-c}{a}$; id quod per III. Prop. valet $\frac{aa-cc}{aa}$: Si quis tribus vicibus idem præstare contendat, habet denuò $a - c$ casûs ad 1 seu $\frac{aa}{aa}$, & c casûs ad sortem proximè inventam $\frac{aa-cc}{aa}$; quod ipsi tantundem valet, ac $\frac{a^3-c^3}{a^3}$: Eodem modo, si 4 vicibus illud in se recipiat, invenitur ejus expectatio $\frac{a^4-c^4}{a^4}$: si quinque, $\frac{a^5-c^5}{a^5}$; & in genere si n vicibus, reperitur sors ejus $\frac{a^n-c^n}{a^n}$, sic ut remaneat contracertanti $\frac{c^n}{a^n}$.

Præter hanc methodum, quæ Auctoris est, duo alii suppetunt modi haud inelegantes Problema solvendi, quorum unus hic est: Quærantur ordine expectationes aleatoris pro singulis jactibus seorsim,

sim, hoc est, quæratur quæ sint illius sortes, si primo, secundo, tertio, quarto &c. demùm jactu, non alio, præstare quid velit; quod enim ex omnium expectationum additione resultat, erit expectatio quæsita. Qui primo jactu quid suscipit, ejus sors ostensa est esse $\frac{a-c}{a} \infty \frac{b}{a}$. Qui secundo jactu præstare vult, ille si primo præstat, non præstat quod intendit, cùm solo secundo præstare debuisset; ideoque deposito frustratur: sin autem primo non præstat, restat illi unus jactus quo id præstare tenetur, qui ipsi valet, ut dictum $\frac{b}{a}$; sed numerus casuum, quibus primo jactu id efficit, per hyp. est b, & eorum quibus non efficit c; unde per 1. Coroll. III. sors ejus fit $\frac{bc}{aa}$. Qui tertio demùm jactu præstare intendit, is si primo præstat rursus deposito excidit, quia intentum non assecutus est, quod eò tendebat, ut solo tertio præstaret: sin primo jactu non præstet, supersunt ipsi duo jactûs, quorum solo posteriori præstare tenetur, quo casu ostensum est ipsi deberi $\frac{bc}{aa}$; sed prius illud b, hoc c casibus contingere potest, quod proin sortem ejus per idem Coroll. efficit $\frac{bcc}{a^3}$. Qui solo 4to jactu præstare aggreditur, is si primo præstat, deposito identidem privatur: si secùs, per tres residuos jactûs ad præced. expectationem $\frac{bcc}{a^3}$ pertingit; quod illi nunc sortem parit $\frac{bc^3}{a^4}$. Atque eodem modo colligitur, quòd sors ejus, qui 5to jactu in se recepit, sit $\frac{bc^4}{a^5}$; qui sexto, $\frac{bc^5}{a^6}$; & generaliter qui n jactu, $\frac{bc^{n-1}}{a^n}$. Ergò cùm sors ejus, qui primo jactu aggressus est, sit $\frac{b}{a}$; qui secundo, $\frac{bc}{aa}$; qui tertio, $\frac{bcc}{a^3}$; qui ultimo, $\frac{bc^{n-1}}{a^n}$; atque expectatio ejus, qui illud indefinitè in aliquo primorum n jactuum præstandum suscepit, ex omnibus illis simul sumtis conflatur, sequitur hanc fore ejus expectationem

$\frac{b}{a} +$

$\frac{b}{a} + \frac{bc}{aa} + \frac{bcc}{a^3} + \frac{bc^3}{a^4}$ . . . uſque ad $\frac{bc^{n-1}}{a^n}$, quæ ſeries eſt quantitatum geometricè-proportionalium, quarum ſumma invenitur $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, ut ſuprà.

Alter modus; Qui n jactibus unius teſſeræ præſcriptum punctorum numerum jacere ſuſcipit, perinde facit, ut ad ſeq. Prop. oſtendetur, ac ſi eundem unico jactu n teſſerarum in aliquâ minimùm teſſerâ jaciendum ſuſciperet. Concipiantur itaque n teſſeræ, ſingulæ inſtructæ a hedris, quas inter ſint c iſto punctorum numero non ſignatæ. Sic erit numerus omnium caſuum in univerſis n teſſeris, a^n; (ut ſupra poſt Prop. IX. evicit Auctor) & per eandem rationem numerus eorum, quibus optata puncta in nullâ teſſerarum emicant, c^n; quia nimirum ratione cujuslibet ex c hedris unius teſſeræ, quælibet ſimilium hedrarum alterius teſſeræ ſimul cadere poteſt. Neceſſe igitur eſt, ut reliquis $a^n - c^n$ caſibus hæc puncta ſaltem in aliquâ teſſerarum reperiantur. Quare qui tali conditione certat, habet $a^n - c^n$ casûs ad obtinendum depoſitum 1, & c^n casûs ad obtinendum o; quod rurſus ut anteà ſortem illi parit $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, ſic ut contracertanti ſemper relinquatur $\frac{c^n}{a^n}$.

Exhibitâ ſic generali Problematis ſolutione, ſi nunc porrò cum Auctore ſcire cupiamus, quo jactuum numero æqualis ſors inter contracertantes incipiat, æquandæ tantùm inter ſe erunt eorum inventæ ſortes, ut fiat $a^n - c^n \infty c^n$, hoc eſt, $a^n \infty 2c^n$; quo indicatur nil aliud requiri, quàm ut numerus omnium caſuum, & numerus eorum quibus non obtinetur quod ſuſceptum eſt, continuo in ſe ductu ad ſimiles poteſtates attollantur, quouſque productum prioris numeri fiat poſterioris duplum: tum enim index poteſtatis, ad quam uterque elevatus eſt, indigitabit quæſitum. Quæ operatio illud inſuper commodi præ Hugenianâ habet, quòd non ſupponat ullius præcedentis casûs ſortem cognitam eſſe: cætera enim compendia, quorum meminit Auctor, de abſcindendis à fine notis, & eliciendis per ſaltum expectationibus, & hîc loci obtinet; quan-

quandoquidem dato cujuslibet numeri quadrato, ejus biquadratum inveniri poteſt non reperto cubo, & biquadrato-quadratum non repertis intermediis poteſtatibus, &c. Viſum autem eſt, exempli Auctoris, in quo a valet 36 & e 35, totam operationem hic ſubjungere:

juſto	*minor*	*major*		*min.*	*maj.*
			e ∞	35	
a ∞	36		ee ∞	1225	
aa ∞	1296		e^4 ∞	1500 . .	1501 . .
a^4 ∞	1679 . .	1680 . .	e^8 ∞	2250 . .	2254 . .
a^8 ∞	2819 . .	2823 . .	e^{16} ∞	5062 . .	5081 . .
a^{16} ∞	7946 . .	7970 . .	e^{24} ∞	1138 . .	1146 . .
a^{24} ∞	2239 . .	2250 . .	e^{25} ∞	3983 . .	4011 . .
a^{25} ∞	8060 . .	8100 . .	$2e^{24}$ ∞	2276 . .	2292 . .
			$2e^{25}$ ∞	7966 . .	8022 . .

ubi liquet, 24^{tam} poteſtatem numeri 36 (quæ cadit inter 2239 . . & 2250 . .) deficere à $24^{tæ}$ poteſtatis numeri 35 duplo (quod cadit inter 2276 . . & 2292 . .): ſed 25^{tam} poteſtatem illius numeri (cujus limites ſunt 8060 . . & 8100 . .) excedere viciſſim duplum $25^{tæ}$ hujus, (utpote quod terminis continetur 7966 . . & 8022 . .).

Monendum tamen eſt, totum hoc expediri poſſe negotium compendio citra comparationem majori per logarithmos, ita: Quia habemus $a^n \infty 2e^n$, & æqualium numerorum æquales ſunt logarithmi, erit quoque $nla \infty l2 + nle$, ſive $nla - nle \infty l2$, ſeu denique $n \infty \frac{l2}{la-le}$; quo indicatur quæſitum numerum jactuum haberi, dividendo ſimpliciter log-um binarii per differentiam inter log-os numerorum a & e. En operationem:

a ∞ 36 | la ∞ 1.5563025
e ∞ 35 | le ∞ 1.5440680

$la - le$ ∞ 0.0122345) $l2$ ∞ 0.3010300 (plus quàm 24, & minus quàm 25; quæ calculo Auctoris & noſtro plane ſunt conſona.

Cæterum solutio nostra Propositionis præsentis ansam nobis suppeditavit investigandi præterea nonnulla alia huic affinia Problemata, quorum unum hoc est: Si plures collusores jacere suscipiant præscriptum punctorum numerum, iisque singulis uni post alterum nonnulli jactus, huic plures illi pauciores, continuò instituendi concedantur, quæritur cujusque sors? Ante omnia liquet, quòd ille cujus sors quæritur haberet per ante ostensa $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, si ipse ludum inciperet; sed quia alii præcedunt, qui victoriam illi præripere possunt, sors ejus minoris æstimanda venit. Deinde patet, quòd expectationes omnium ipsum præcedentium simul sumtæ æquari debeant expectationi unius solius, qui in locum eorum succedere vellet, & cui tot jactus concederentur quot omnibus illis simul. Sed per eandem rationem, si numerus horum jactuum dicatur s, expectatio hæc foret $\frac{a^s - c^s}{a^s}$; unde per annotata hujus ad lit. I. ille cujus sors quæritur, tum, cùm primus ludere incipit, habere censetur $a^s - c^s$ casus, quibus aliquis præcedentium vincat sibique depositum præripiat; & c^s casus, quibus ludendi vices ad se devolvuntur, ipseque sortem antè dictam $\frac{a^n - c^n}{a^n}$ acquirit: id quod ipsi per 1. Coroll. III. valet $\frac{a^n - c^n . c^s}{a^n . a^s} \infty \frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}}$. Idem etiam sic evincitur: Quia universis collusoribus incluso ultimo per hyp. concessi sunt $s + n$ jactus, erit eorum expectatio totalis $\frac{a^{s+n} - c^{s+n}}{a^{s+n}}$; à quâ proin si expectationes omnium præcedentium postremum, quæ simul sumtæ constituunt $\frac{a^s - c^s}{a^s}$, subtrahas, relinquetur pro expectatione solius ultimi $\frac{a^{s+n} - c^{s+n}}{a^{s+n}} \frac{- a^s + c^s}{a^s} \infty \frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}}$, ut antea. Nota, insigniter hic abbreviari calculum, si numeri casuum a & c compositi sint, & eorum loco per 2. Cor. III. minimi in

in eâdem ratione termini accipiantur: Proponantur ex. gr. aliquot collusoribus jacienda duabus tesseris puncta septem, & eorum primo permittatur unus, secundo 2, tertio 3, quarto 4 jactus consecutivè instituendi, velimque scire expectationem quarti. Quoniam hîc numerus jactuum quarti $n \infty 4$, & summa eorum, qui praecedentibus tribus sunt concessi, $s \infty 1 + 2 + 3 \infty 6$; & proin

$\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}} \infty \frac{a^4 c^6 - c^{10}}{a^{10}}$; insuperque numeri a & c casuum scil. tum omnium in duabus tesseris, tum eorum quibus non obtinetur praescriptus punctorum septenarius, sunt 36 & 30, pro quibus pono tantùm 6 & 5; idcirco à producto ex 4^tâ^ potestate senarii in 6^tam^ quinarii aufero decimam quinarii, reliquumque divido per decimam senarii, & prodibit pro quaesitâ expectatione collusoris quarti $\frac{10484375}{60466176}$.

Manifestum est in hocce Problemate, omnium collusorum, quotquot etiam fuerint & quotcunque jactus ipsis concedantur, expectationes in unam summam collectas necessariò ab uno integro deficere debere; quandoquidem semper casu quodam utcunque rarissimo accidere potest, ut eorum nullus praescriptum punctorum numerum consequatur. Deinde etiam per se clarum est, quòd in pari jactuum numero unusquisque posteriorum collusorum deteriorem sortem nancisci debeat unoquoque priorum, eoque magis quò plures unicuique jactus continuò instituendi conceduntur; cùm utique tot concedi possint, ut primi ludentis spes in certitudinem ferè abeat, reliquis verò omnis vincendi spes evanescat. Quae proin consideratio aliud nobis suggessit Problema, quod eò tendit, ut dato numero jactuum à primo consecutivè instituendorum investigetur, quot jactus secundo reliquisque concedendi sint, ut sortes omnium fiant aequales: oportet autem, ut numerus jactuum primi non pariat ei sortem excedentem unum dimidium, si collusores sunt duo; aut tertiam partem integri, si sunt tres; aut 4^tam^ si quatuor &c. cùm secùs Problema impossibile foret. Sint collusores m, numerus jactuum ab universis instituendorum vocetur x, ab omnibus excepto ultimo y, adeoque à solo ultimo $x - y$; numerus verò jactuum

 primi

primi sit n: erit ejus expectatio $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, & omnium m collusorum expectationes conjunctim $\frac{a^x - c^x}{a^x}$; cumque singulæ expectationi primi ponantur æquales, erit quoque earum summa $\frac{m.a^n - c^n}{a^n}$; quare $\frac{m.a^n - c^n}{a^n} \infty \frac{a^x - c^x}{a^x}$, hoc est $m - \frac{mc^n}{a^n} \infty 1 - \frac{c^x}{a^x}$, seu factâ transpositione, $\frac{c^x}{a^x} \infty \frac{mc^n}{a^n} + 1 - m \infty \frac{mc^n + \overline{1-m}\,a^n}{a^n}$, & sumtis logarithmis, $x\,lc - x\,la \infty l\,\overline{mc^n + \overline{1-m}\,a^n} - n\,la$, factâque divisione, $x \infty \frac{l\,\overline{mc^n + \overline{1-m}\,a^n} - n\,la}{lc - la}$, sive (mutatis signis ob $a > c$) $x \infty \frac{n\,la - l\,\overline{mc^n + \overline{1-m}\,a^n}}{la - lc}$. Ob eandem rationem omnium collusorum præcedentium ultimum, hoc est, primorum $m - 1$ collusorum expectationes simul sumtæ sunt $\frac{\overline{m-1}.a^n - c^n}{a^n} \infty \frac{a^y - c^y}{a^y}$; unde simili modo elicitur $y \infty \frac{n\,la - l\,\overline{\overline{m-1}\,c^n + \overline{2-m}\,a^n}}{la - lc}$: quare tandem habetur $x - y \infty \frac{l\,\overline{\overline{m-1}\,c^n + \overline{2-m}\,a^n} - l\,\overline{mc^n + \overline{1-m}\,a^n}}{la - lc}$, quod requirebatur. Ita si sint tres collusores, & eorum primo duo concedantur jactus, jacienda verò proponantur duabus tesseris puncta septem (vel etiam unâ tesserâ puncta sex; quia utrobique ratio numeri a ad numerum c ea est, quam habet 6 ad 5) quo casu primi sors per suprà ostensa, propter $n \infty 2$, est $\frac{aa - cc}{aa} \infty \frac{11}{36}$ paulò minor triente depositi: facio primò $m \infty 2$, deinde $m \infty 3$, & hoc pacto reperio, quòd ad æquandas quàm proximè reliquorum sortes concedendi sint secundo collusori tres, & tertio octo jactus.

PRO-

PROPOSITIO XII.

INvenire, quot tesseris suscipere quis possit, ut primâ vice duos senarios jaciat.

Hoc autem tantundem est, ac si quis scire velit, quoto jactu L
quispiam unâ tesserâ suscipere possit, ut bis senarium jaciat. Quòd si quis duobus jactibus susciperet, obtingeret ei, per ea quæ ante M
ostensa sunt, $\frac{1}{36}a$. Qui illud tribus jactibus in se reciperet, si primus ejus jactus senarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque senarius esse deberet; id quod tantundem valere dictum est ac $\frac{1}{36}a$. At verò primo ejus jactu existente senario, opus est, ut ex duobus jactibus non nisi semel senarium jaciat. Quod per X. Propositionem tantundem valet ac si $\frac{11}{36}a$ haberet. Atqui certum est ipsum unum habere casum, quo primâ vice senarium jaciat, & quinque casus quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio unum casum ad $\frac{11}{36}a$, & 5 casus ad $\frac{1}{36}a$, id quod per II. Propositionem tantundem valet ac $\frac{16}{216}a$ seu $\frac{2}{27}a$. Hoc pacto assumendo continuè unum jactum ampliùs, invenitur 10 jactibus unâ tesserâ, aut 10 tesseris primo jactu suscipi posse, ut duo senarii jaciantur, idque cum lucro.

Annotat.

Hoc autem tantundem est &c.] Si cui decem ex. gr. L
tesseris unus jactus concedatur, evidens utique est nihil referre, sive decem illas tesseras simul & semel seu successivè unam post alteram in alveum projiciat: & si successivè id facit, perinde rursus esse constat, sive tesseræ illæ decem quæ projiciuntur sint totidem diversæ tesseræ, sive una eademque decies ex alveo sublata & projecta.

Per ea quæ ante ostensa sunt &c.] Ostensum est in M
præced. Propos. $\frac{1}{36}a$ esse partem ejus, qui uno jactu duabus tesseris duos senarios jacere contendit, sed modò audivimus perinde esse, sive quis unum jactum duabus tesseris, sive duos jactus unâ tesserâ instituat: quare & illi, qui unâ tesserâ duobus jactibus duos senarios, hoc est, bis senarium jacere suscipit, eadem debetur portio $\frac{1}{36}a$.

Ad Propositionem in genere:

PRoblema hîc loci propositum, non secùs atque præcedens, solutionem quoque admittit per symbola; & generaliter conceptum huc redit, ut inveniatur expectatio ejus, qui certo jactuum numero suscepit aliquid præstare bis, vel ter, vel quater pluriesve. Nam qui semel tantùm id præstare suscipit, ejus sors in præced. jam Propositione calculo subducta habetur.

Qui duabus vicibus aliquid bis præstare suscipit, ille si primâ vice non præstat nihil depositi habebit, sed totum adversario cedet: sin id primâ vice præstiterit, reliquo aleæ jactu adhuc semel præstare tenetur; quo casu per annotata præced. Propos. (positâ significatione literarum a, b & c, ut ibi) ipsi debetur $\frac{a-c}{a}$, & adversario ejus $\frac{c}{a}$; (præstat enim hujus sortem, ceu brevioribus terminis comprehensam, inquirere.) Atqui sunt b casûs, quibus id primâ vice efficere possit; & c casus, quibus secùs eveniat: quocirca sunt contracertanti c casus ad obtinendum depositum $1 \infty \frac{c+b}{a}$, & b casus ad acquirendum $\frac{c}{a}$; id quod ipsi valet $\frac{cc+2bc}{aa}$.

Qui tribus vicibus aliquid bis efficere contendit, ille si primâ vice efficiat, quod semper b casibus evenit, duabus reliquis vicibus idem non nisi semel efficere obstrictus est, sortemque adeò Antagonistæ sui per Annotat. præc. Prop. facit $\frac{cc}{aa}$: sin primâ vice id non efficiat, quod casibus c contingit, tenebitur illud duabus reliquis vicibus bis præstare; quod valere modò diximus Adversario ejus $\frac{cc+2bc}{aa}$. Habet igitur iste c casus ad $\frac{cc+2bc}{aa}$, & b casus ad $\frac{cc}{aa}$; id quod ei parit expectationem $\frac{c^3+3bcc}{a^3}$.

Sic qui quatuor vicibus aliquid bis effectui dare tentat, is b casibus, quibus primus ei jactus ex voto succedere potest, adversario sortem acquirit $\frac{c^3}{a^3}$; & c casibus, quibus contrarium accidit, eum

eum ad præcedentem expectationem $\frac{c^3+3bcc}{a^3}$ perducit; id quod huic sortem gignit $\frac{c^4+4bc^3}{a^4}$.

Qui verò tribus vicibus ter præstare quippiam conatur, is si primo jactu scopo aberret, antagonistam suum depositi 1 ∞ $\frac{cc+2bc+bb}{aa}$ victorem reddit: sin consequatur quod intendit, residuos habet duos jactus, quorum etiam uterque ejus voto respondere deberet; quo in statu adversarii sortem ostendimus esse $\frac{cc+2bc}{aa}$. Posterius autem b, prius c casibus accidere diximus; unde contracertantis expectatio resultat $\frac{c^3+3bcc+3bbc}{a^3}$.

E' quibus porrò haud absimili ratione inveniri possunt expectationes ejus, qui alteri 4, 5, 6 &c. aleæ jactibus aliquid bis, ter, quater, pluriesve præstandum offert: unde nata est sequens Tabella, quam quis levi labore continuabit, quousque opus fuerit; si consideret, columnas transversales tabellæ ordine complecti quantitates omnium potestatum binomii $\frac{c+b}{a}$, secundam nim. quadrati, tertiam cubi, quartam biquadrati &c. ita quidem, ut prima columna verticalium solos primos, secunda duos, tertia tres, quarta 4$^{\text{or}}$ priores harum potestatum terminos exhibeat. Hinc enim colligitur facilè, illum qui indefinitè n jactibus aliquid bis præstandum offert, sortem habere $\frac{c^n+nbc^{n-1}}{a^n}$; qui ter, $c^n+nbc^{n-1}+\frac{n.n-1}{2}bbc^{n-2}:a^n$; qui quater, $c^n+nbc^{n-1}+\frac{n.n-1}{2}bbc^{n-2}+\frac{n.n-1.n-2}{2.3}b^3c^{n-3}:a^n$; & generaliter denique, qui illud m vicibus præstandum offert, huic sortem competere $c^n+nbc^{n-1}+\frac{n.n-1}{2}bbc^{n-2}+\frac{n.n-1.n-2}{2.3}b^3c^{n-3}$ .... usque ad $+\frac{n.n-1.n-2\ldots.n-m+2}{2.3.4\ldots.m-1}b^{m-1}c^{n-m+1}:a^n$.

Eadem etiam formula aliter & scitè elici potest, in auxilium vocatâ combinationum doctrinâ, hoc modo: Constat ex suprà

Tabu-

Tabula

pro cognoscendâ sorte ejus, qui alteri aliquot aleæ jactibus quippiam semel vel aliquoties præstandum offert.

Nota, sors ejus qui suscipit, perpetuò est complementum ad unitatem sortis illius, qui offert. Num. omnium casuum in singulis jactibus ∞ a; eorum quibus præstatur quod susceptum est ∞ b; quibus non præstatur ∞ c.

Si quid præstandum sit, *Jactibus*	*semel*	*bis*	*ter*	*quater*	
I.	$c : a$				
II.	$cc : aa$	$cc + 2bc : aa$			
III.	$c^3 : a^3$	$c^3 + 3bcc : a^3$	$c^3 + 3bcc + 3bbc : a^3$		
IV.	$c^4 : a^4$	$c^4 + 4bc^3 : a^4$	$c^4 + 4bc^3 + 6bbcc : a^4$	$c^4 + 4bc^3 + 6bbcc + 4b^3c : a^4$	
V.	$c^5 : a^5$	$c^5 + 5bc^4 : a^5$	$c^5 + 5bc^4 + 10bbc^3 : a^5$	$c^5 + 5bc^4 + 10bbc^3 + 10b^3cc : a^5$	&c.
VI.	$c^6 : a^6$	$c^6 + 6bc^5 : a^6$	$c^6 + 6bc^5 + 15bbc^4 : a^6$	$c^6 + 6bc^5 + 15bbc^4 + 20b^3c^3 : a^6$	

m vicibus

n. $c^n + nbc^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2}bbc^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}b^3c^{n-3} \ldots + \frac{n.n-1.n-2\ldots n-m+2}{1.2.3.4\ldots m-1}b^{m-1}c^{n-m+1} : a^n.$

dictis,

dictis, eodem recidere, ſive quis n jactibus unius teſſeræ aliquid m vicibus præſtandum ſuſcipiat, ſive id unico jactu n teſſerarum in m teſſeris præſtandum ſibi ſumat: Sint igitur teſſeræ A, B, C, D &c. quarum numerus ſit n, ſingulæ inſtructæ a hedris, quas inter b voto ſuſcipientis reſpondeant, reliquæ c non reſpondeant; & quæratur, quot caſibus accidere poſſit, ut tum in nullâ teſſerarum, tum in unâ tantùm teſſerâ, tum in ſolis duabus, 3, 4 &c. tum denique in $m-1$ tantùm teſſeris præſtetur quod ſuſceptum eſt: omnibus enim his caſibus ſuſcipiens voto ſuo excidit, & antagoniſta ejus victoriâ potitur. Oſtenſum autem fuit in annot. præc. Prop. caſus eſſe c^n, quibus contingere poſſit ut in nullâ n teſſerarum prodeat quod ſuſceptum eſt: & ſimili modo colligitur, caſus eſſe c^n, quibus contingere poſſit ut in nullâ n teſſerarum prodeat quod ſuſceptum eſt; & ſimili modo colligitur cuſus eſſe b vel bb vel b^3 &c. quibus una teſſerarum putà A, aut duæ A & B, aut tres A, B & C &c. ſuſcipientis voto reſpondeant; ſicut & caſus c^{n-1}, aut c^{n-2}, aut c^{n-3} &c. quibus cæteræ $n-1$, vel $n-2$, vel $n-3$ &c. teſſeræ ſpem ejus fallant: unde cùm ſinguli horum caſuum cum unoquoque priorum conjungi poſſint, ex ductu horum in illos naſcentur caſus bc^{n-1}, aut bbc^{n-2}, aut b^3c^{n-3} &c. Et quia teſſera illa vel illæ, quæ favent ſuſcipienti, poteſt eſſe vel A vel B vel C &c. ſi ſit una: vel A & B, aut A & C, aut B & C &c. ſi ſint duæ: vel A, B & C, aut A, B & D &c. ſi ſint tres, &c. hinc numeri caſuum rurſus toties multiplicabuntur, quoties ex univerſis n teſſeris ſingulas, binas aut ternas &c. accipere licet; ſed licet hoc, per doctrinam combinationum ſecundâ parte tradendam, n, vel $\frac{n.n-1}{1.2}$, vel $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$ &c. vicibus: quare factâ hâc alterâ multiplicatione caſus emergent nbc^{n-1}, aut $\frac{n.n-1}{1.2}bbc^{n-2}$, aut $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}b^3c^{n-3}$ &c. quibus in unâ, duabus, aut tribus &c. duntaxat teſſeris, ſed quomodolibet ſumptis, eveniat quod ſuſceptum eſt; & conſequenter etiam caſus $\frac{n.n-1.n-2\ldots n-m+2}{1.2.3.4\ldots m-1}$ $b^{m-1}c^{n-m+1}$, quibus id eveniat in $m-1$ teſſeris. Cùm itaque omnes hi recenſiti caſus antagoniſtam ſuſcipientis, uti dictum, ludi victorem reddant, prætereaque in univerſis n teſſeris caſus exiſtant

 a^n, fiet

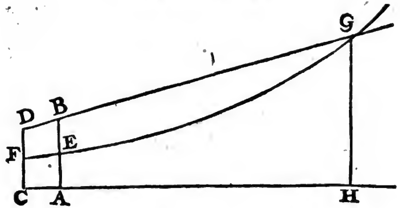
a^n, fiet per 1. Coroll. 3. sors ejus $c^n + nbc^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2} bbc^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} b^3 c^{n-3} \ldots\ldots + \frac{n.n-1.n-2\ldots n-m+2}{1.2.3.4\ldots m-1} b^{m-1} c^{n-m+1} : a^n$, ut suprà. Quoniam autem in propositâ quæstione, sicut in præcedente, præcipuè hoc intenditur, ut investigetur, quot aleæ jactibus expectationes lusoris & adversarii incipiant æquari, sive utrivis competere dimidium depositi; idcircò nunc porrò æquationem instituo inter repertam adversarii sortem & $\frac{1}{2}$, indeque valorem numeri n quoad possum determino. Ex. gr. Si cum Auctore scire desiderem, quo jactuum numero quid bis præstandum suscipi possit, putà unâ tesserâ senarius bis jaciendus, ut æquâ sorte certetur; facio $\frac{c^n + nbc^{n-1}}{a^n} \propto \frac{1}{2}$, & habebo $a^n \propto 2c^n + 2nbc^{n-1} \propto \overline{2c+2nb}, c^{n-1}$, quo indicatur, numerum a ad eam potestatem elevandum esse, quæ proximè sit æqualis producto ex potestate uno gradu depressiore ipsius c, & duplo summæ, quam numerus c cum ipso b ducto in indicem potestatis a constituit. Hoc enim facto index potestatis a denotabit numerum jactuum, quo quid bis præstandum suscipi potest. Addo calculum pro Auctoris exemplo, in quo a numerus omnium casuum unius tesseræ valet 6, b numerus eorum quibus obtinetur senarius 1, & c eorum quibus non obtinetur 5:

	$c \propto 5$
$a \propto 6$	$cc \propto 25$
$a^3 \propto 216$	$c^4 \propto 625$
$a^9 \propto 10077696$	$c^8 \propto 390625$
$a^{10} \propto 60466176$	$c^9 \propto 1953125$

$$a^9 \propto 10077696 < 10937500 \propto 28 \text{ in } 390625 \propto \overline{2c+18b}, c^8,$$
$$a^{10} \propto 60466176 > 58593750 \propto 30 \text{ in } 1953125 \propto \overline{2c+20b}, c^9.$$

quare cùm nona potestas ipsius a adhuc deficiat, decima verò excedat potestatem ipsius c uno gradu inferiorem & dictâ ratione multiplicatam, colligi debet, novem jactus nondum sufficere, at jactibus decem cum lucro suscipi posse, ut unâ tesserâ bis senarius jaciatur.

Idem



Idem etiam per constructionem Geometricam non inconcinnam obtinere licet, ope Curvæ quam vocant Logarithmicæ: Insistat axi CH Logarithmica quævis FEG, cui applicentur rectæ AE & CF, quæ sint in ratione a ad c, producendæ ad duplam longitudinem in B & D; & agatur recta DB, occurrens curvæ in G: sumtâ pro unitate CA, abscindet demissa applicata GH in axe portionem CH ∞ x, numero jactuum, quo aliquid bis præstandum suscipi potest. Et quemadmodum hoc consecuti sumus occursu lineæ rectæ & logarithmicæ: sic numerum jactuum, quo quid ter præstandum potest suscipi, per intersectionem Parabolæ & logarithmicæ; & quo id quater sæpiusve, ejusdem & altioris gradatim curvæ algebraïcæ ope definire licet.

Cæterùm possemus & hic, uti fecimus in præced. Propos. materiam hanc prosequi ulteriùs & investigare sortes plurium Aleatorum, qui singuli æquali an inæquali numero jactuum consecutivè instituendorum susciperent aliquid præstare aliquoties; aliasque plures ejusmodi quæstiones formare; nisi & brevitati consulendum, & Lectoris industriæ quædam relinquenda esse viderentur.

Unicum tamen, ne hactenùs dicta sinistrè acciperentur, monere adhuc operæ pretium duximus: nempe, Problemata hujus & præcedentis Propositionis, ubi quæritur expectatio ejus, qui aliquot aleæ jactibus quippiam semel vel aliquoties præstandum suscipit, ita

 esse

esse intelligenda, ut sensus sit, etiam tum lucraturum qui suscepit, si sæpiùs quàm suscepit præstiterit. Nam si sensus esset, eum hoc casu perditurum, aliud foret Problema, & aliæ nascerentur expectationes, quæ quia in sequentibus usum habebunt, determinandæ nobis supersunt, priusquàm hinc discedamus. Ut autem generalior fiat solutio, ponamus non in omnibus aleis æquè-multos regnare casus, uti hucusque supposuimus, sed numerum eorum in diversis jactibus utcunque variare, vocando in jactu

	Pr.	*Sec.*	*Tert.*	*Quart.*	*Quint.*
Num. casuum omnium - - -	*a*	*d.*	*g.*	*p.*	*s.*
eorum quib. quid præstatur - -	*b.*	*e.*	*h.*	*q.*	*t.*
- - - *non præstatur* - -	*c.*	*f.*	*i.*	*r.*	*u.*

quo posito, si aliquot aleæ jactus, putà quinque sint instituendi, & quæratur expectatio ad id præstandum in nonnullis horum jactuum, ex. gr. in tribus primis, & non præstandum in reliquis; considerare oportet, quòd quilibet b casuum primi jactûs conjungi possit cum quolibet e casuum secundi, & inde resultantium casuum be quilibet rursùs cum quolibet h casuum tertii, quod facit beh casus: & pari modo, quòd quilibet r casuum quarti jactûs conjungi possit cum quolibet u casuum quinti, quod casus suppeditat ru; hinc cùm & horum singuli cum quolibet priorum beh combinari queant, erit numerus omnium casuum quibus contingere potest, ut in primis tribus jactibus præstetur præstandum, in postremis duobus non præstetur, $behru$; & quia ob similem rationem numerus omnium omninò casuum in universis quinque jactibus est $adgps$, sequitur expectationem quæsitam per 1. Cor. 3. fore $\frac{behru}{adgps}$. unde talis formatur

Regula

pro cognoscendâ sorte Aleatoris, cui plures aleæ jactus concessi, & qui præcisè in certis quibusdam, non aliis jactibus quippiam præstare tenetur.

PRoductum continuum ex numeris casuum, quibus quid præstatur in jactibus, in quibus præstari debet, & eorum quibus non præstatur, ubi non præstari debet, dividatur per productum conti-

continuum ex numeris omnium casuum in jactibus universis; & quotiens exhibebit quæsitum.

Coroll 1. Si iidem numeri casuum regnent in omnibus aleis, hoc est, si singuli $d, g, p, s \infty a$; singuli $e, h, q, t \infty b$; & singuli $f, i, r, u \infty c$: expectatio inventa $\frac{behru}{adgps}$ vertetur in hanc $\frac{b^3c^2}{a^5}$; & generaliùs in $\frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$, sumto n pro numero omnium jactuum, & m pro numero eorum, in quibus præstandum præstari debet.

Cor. 2. Si iidem numeri casuum regnent in omnibus aleis, & determinatus etiam sit numerus alearum seu jactuum, quibus quid præstari debet; ipsi verò jactus non sint definiti, sed quomodolibet accipiendi; putà, si 5 jactus sint instituendi, & in tribus eorum quibuslibet quid præstandum sit, patet hinc quantitatem expectationis inventam toties adhuc multiplicari, quoties ex jactibus quinque diversimodè terni, h. e. generaliter, ex n rebus diversæ n res accipi possunt. Potest autem hoc fieri, per Combinationum doctrinam seq. part. tradendam, $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}\ldots\overline{n-m+1}}{1.2.3.4\ldots m}$ sive (quòd perinde) $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}\ldots\overline{m+1}}{1.2.3.4\ldots\overline{n-m}}$ vicibus: quare nunc expectatio suscipientis valebit $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}\ldots\overline{n-m+1}}{1.2.3.4\ldots m}, \frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$, vel $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}\ldots\overline{m+1}}{1.2.3.4\ldots\overline{n-m}}, \frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$.

PROPOSITIO XIII.

SI cum alio ludam duabus tesseris unum solummodò jactum, hac conditione, ut, si septenarius eveniat, ego vincam; at ille, si denarius obtingat; si verò quidquam aliud accidat, ut tum id quod depositum est æqualiter dividamus: Invenire qualis istius pars cuique nostrûm debeatur.

Quoniam 36 jactuum, qui duabus tesseris proveniunt, 6 jactus existunt septem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, restant adhuc 27 jactus, qui ludum æquare possunt; id quod si fiat, cui-
N que nostrûm debebitur $\frac{1}{2}a$. Verùm si id non obtingat, habebo 6 casus, quibus vincam, id est, ut a habeam; & 3 casus, quibus diversum eveniat, nihilque habeam: id quod per II. Propositionem, tantundem est ac si tali casu $\frac{2}{3}a$ haberem. Habeo itaque ab initio 27 casus ad $\frac{1}{2}a$, & 9 casus ad $\frac{2}{3}a$, id quod, per II. Propositionem,
O tantundem est ac $\frac{13}{24}a$. Et remanet contracertanti $\frac{11}{24}a$.

Annotat.

N *Verùm si id non obtingat, habebo 6 casus &c.*] Auctor priùs quærit expectationem ejus, qui 6 habet casus ad vincendum & 3 ad perdendum, quæ expectatio est $\frac{2}{3}a$; eâque demum mediante infert quæsitum: sed potest idem quoque non cognitâ illâ expectatione immediatè concludi; nam 27 casus ad $\frac{1}{2}a$, 6 casus ad a, & 3 ad o, quos habeo si propositâ conditione ludo, etiam tantundem valent per 1. Coroll. 3, ac $\frac{13}{24}a$; uti quoque 27 casus ad $\frac{1}{2}a$, 3 ad a, & 6 ad o, quos habet collusor meus, ei per idem Cor, sortem pariunt $\frac{11}{24}a$.

O *Et remanet contracertanti $\frac{11}{24}a$.*] Residuum nempe totius depositi. Quia enim ambo simul finito lusu infallibiliter totum depositum, nec plus nec minus, impetramus, hinc etiam amborum simul expectatio per Axioma nostrum integrum depositum exhaurire debet, uti quoque in Propos. IV. ad literam C notavimus. Secùs foret, si qui casus darentur, quibus & alii de deposito participarent; veluti, si postrema conditio lusui annexa juberet, ut id quod depositum est in pauperes erogetur; tum enim propter 6 casus ad a, & 30 ad o, non nisi haberem $\frac{1}{6}a$; & collusor propter 3 casus ad a, & 33 ad o, tantùm haberet $\frac{1}{12}a$; residuum verò depositi $\frac{3}{4}a$ pauperibus deberetur, qui propterea & ipsi in rationem sortis venire censendi essent.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

SI ego & alius duabus tesseris alternatim jaciamus, hâc conditione, ut ego vincam simul atque septenarium jaciam, ille verò quàm primùm senarium jaciat; ita videlicet, ut ipsi primum jactum concedam: Invenire rationem meæ ad ipsius sortem.

Ponatur, sortem meam valere x, & id quod depositum est vocari a; eritque sors alterius $\infty\, a - x$. Et patet, quandocunque ipsius vices jaciendi revertuntur, sortem meam tum rursus debere esse $\infty\, x$. At quandocunque meæ vices sunt ut jaciam, sors mea pluris æstimanda est. Ponatur itaque pro ejus valore y. Jam quoniam ex 36 jactibus reperiuntur 5 in 2 tesseris, qui collusori meo senarium dare lusûsque victorem reddere possunt; & 31 jactus, quibus diversum eveniat, id est, qui meas jaciendi vices promovent: habebo, priusquàm jacit, 5 casus ad obtinendum o, & 31 casus ad obtinendum y. id quod per III. Propositionem valet $\frac{31y}{36}$. Posuimus autem casum meum à principio esse $\infty\, x$. Quocirca erit $\frac{31y}{36} \infty\, x$, adeoque $y \infty \frac{36x}{31}$. Deinde positum fuit, vicibus meis venientibus, sortem meam valere y. Ego verò jacturus, habeo 6 casus ad obtinendum a, quandoquidem 6 jactus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeoque 30 casus, quibus vices collusoris mei revertuntur, id est, ut mihi obtineam x. id quod per III. Propositionem valet $\frac{6a+30x}{36}$. Hoc autem cùm sit $\infty\, y$, erit, invento, ut ante, $\frac{36x}{31} \infty\, y$, $\frac{30x+6a}{36} \infty \frac{36x}{31}$. Unde invenitur $x \infty \frac{31a}{61}$, valor meæ sortis. Et per consequens collusoris mei erit $\frac{30a}{61}$; ita ut ratio sortis meæ ad illius sortem sit, ut 31 ad 30.

Annotat.

Auctor in hoc Problemate primùm adhibere cogitur analysin algebraï-

algebraïcam, cùm in præcedentibus solâ synthesi usus fuisset: cujus differentiæ ratio est, quòd in illis omnibus expectatio quæsita fluebat ex aliis expectationibus vel in totum cognitis & datis, vel incognitis quidem, at naturâ prioribus ac simplicioribus, & quæ ab hâc vicissim non dependebant; quapropter incipiendo ab omnium simplicissimis earum ope gradatim pergere poterat ad enodandos alios casus magis magisque compositos absque analysi ullâ. Secùs verò se hîc res habet; nam expectationem meam, quam possideo cùm collusorem ordo jaciendi tangit, Auctoris more æstimare non possum, nisi cognitam habuero sortem, quam acquiro ubi vices jaciendi ad me devolvuntur: sed & hanc cognoscere nequeo, nisi priorem illam compertam habeam, quæ tamen ea ipsa est quam quærere intendo; unde cùm utraque sit incognita, & altera ab alterâ vicissim dependeat, non possunt Auctoris vestigiis insistendo aliter quàm analyseos ope ex se mutuò elici: id quod operæ pretium est observâsse, ut utriusque methodi discrimen, & quando hæc illave in usum vertenda sit, perspicuo aliquo exemplo pateret.

Dixi, Auctoris vestigiis insistendo non posse; datur enim adhuc alia peculiaris via, quâ quæsitum consequi possum citra analysin ullam, & quam in sequentibus quoque utiliter adhibere licet. Fingamus loco duorum alternatim ludentium infinitos Collusores, quibus singulis ordine uni post alterum singuli tantùm concedantur jactus, eâ lege, ut cui collusorum in locis imparibus senarius, aut cui in paribus septenarius primùm evenerit, ille vincat atque depositum auferat: quo pacto liquet, secundum collusorem vincere non posse, nisi duorum primorum jactuum solus posterior præstet quod præstare debet; nec tertium victoriâ potiri posse, nisi trium primorum jactuum solus tertius id præstet; nec quartum, nisi quatuor primorum solus quartus, & ita consequenter. Quare, si pro 5 & 31, numeris casuum quibus in tesseris duabus evenire potest senarius vel non evenire, ponamus b & c; item pro 6 & 30 numeris casuum, quibus septenarius obtingere vel non obtingere potest, e & f; pro 36 verò numero omnium casuum $b+c$, vel $e+f$, scribamus a: inveniemus per Regulam in fine annot. Prop. XII. traditam singulorum Collusorum expectationes, ut sequitur:

Collus.

Colluf.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	&c.
Expect.	$\frac{b}{a}$.	$\frac{ce}{aa}$.	$\frac{bcf}{a^3}$.	$\frac{ccef}{a^4}$.	$\frac{bccff}{a^5}$.	$\frac{c^3eff}{a^6}$.	$\frac{bc^3f^3}{a^7}$.	$\frac{c^4ef^3}{a^8}$.	&c.

Quòd ſi nunc in primi, tertii, quinti & reliquorum imparibus numeris deſignatorum Colluſorum locum unum ſolum mente ſubſtituam, meque ipſum in locum ſecundi, quarti, ſexti, & cæterorum, qui in pari graduum numero ſunt collocati, conſtabit hunc ipſum fore caſum præſentis quæſtionis, atque inſuper expectationes utriusque noſtrûm æquari debere expectationibus ſimul ſumtis omnium illorum colluſorum, in quorum locum ſuffecti ſumus. Sors itaque mea exprimetur per $\frac{ce}{aa} + \frac{ccef}{a^4} + \frac{c^3eff}{a^6} + \frac{c^4ef^3}{a^8}$ &c. & colluſoris mei ſors per $\frac{b}{a} + \frac{bcf}{a^3} + \frac{bccff}{a^5} + \frac{bc^3f^3}{a^7}$ &c. ſeries ſcil. infinitas quantitatum geometricè progredientium in ratione aa ad cf, & quarum prior ſummam conficit $\frac{ce}{aa-cf}$, poſterior $\frac{ab}{aa-cf}$; ſic ut ſors mea ad ſortem illius ſe habeat, ut ce ad ab, ſeu reſtitutis valoribus lit. a, b, c & e, ut 31 ad 30, planè ut ſuprà.

APPENDIX.

Coronidis loco Auctor Tractatui ſuo ſubjunxit ſequentia quinque Problemata, ſed omiſſâ analyſi vel demonſtratione, quam Lectori eruendam reliquit. Hanc itaque nos partim hic ſupplere, partim in Librum ſecundum rejicere coacti ſumus.

PROBLEMA I.

A & B unà ludunt duabus teſſeris, hâc conditione, ut A vincat, ſi ſenarium jaciat, at B ſi ſeptenarium jaciat. A primò unum jactum inſtituat; deinde B duos jactus conſequenter; tum rurſùs A duos jactus, atque ſic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Quæritur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B? Reſp. ut 10355 ad 12276.

Solutio: Ponamus, sortem ipsius A valere t, tum cùm ludere incipit; at cùm ordo jaciendi collusorem B tangit, x: cùm B semel lusit, y: cùm bis, hoc est, cùm ludendi vices ad ipsum A redeunt, z. Quoniam enim omnes istæ sortes differentes sunt & incognitæ, earumque præcedens quælibet à sequente & postrema vicissim à primâ dependet, uti ex subjunctâ operatione constabit, non poterit Problema istud Auctoris saltem methodo, per ea quæ ad Propos. ult. annotata sunt, aliter quàm mediante analysi algebraïcâ expediri. Primò itaque quia in 36 jactibus duarum tesserarum reperiuntur 5, qui ipsi A senarium dare, eumque ludi victorem reddere possunt; & 31 jactus, qui ordinem jaciendi in collusorem B transferunt; habebit A, tum cùm ludum inchoat, 5 casus ad obtinendum a (id quod depositum est) & 31 ad obtinendum x; id quod per sæpiùs laudatam Propos. valet $\frac{5a+31x}{36}$: cùm autem eadem à principio sors vocata fuerit t, erit propterea $t \propto \frac{5a+31x}{36}$. Deinde cùm ordo ludendi tangit collusorem B, habet A 6 casus ad obtinendum nihil (quandoquidem 6 sunt jactus 7 punctorum, qui adversario ejus favent) & 30 casus ad acquirendum y, quod sortem ipsi parit $\frac{5}{6}y$. Eademmet verò sors suprà nobis dicta fuit x; quare $x \propto \frac{5}{6}y$. Porrò cum collusor B, absoluto primo jactu alterum aggressurus est, habet A ob eandem rationem 6 casus ad o, & 30 ad sortem sequentem z; & siquidem obtinere tum etiam supponatur y, erit $y \propto \frac{5}{6}z$. Denique vicibus ludendi ad ipsum A revertentibus, quo casu ejus expectationem z vocamus, habet is 5 casus ad a, si nempe senarium jaciat, & 31 casus ad obtinendam sortem pristinam t, si secùs eveniat; quandoquidem tunc collusores in eo statu erunt, in quo fuerant à principio, dum ipsi A unus superest jactus, quem excipere debent duo jactus à B instituendi, & hos duo alii ab A, atque ita deinceps, omnino sicut ab initio: constat autem 5 casus ad a, & 31 ad t valere $\frac{5a+31t}{36}$; quocirca $z \propto \frac{5a+31t}{36}$. Inventis hâc ratione tot æquationibus, quot suppositæ fuerunt literæ incognitæ, oportet à postremis ad primas retrogredi, substituendo valorem z per ultimam

mam repertum in proximè præcedente, ut habeatur $y \infty \frac{25a+155t}{216}$; & hunc valorem in antepenultimâ, ut fiat $x \infty \frac{125a+775t}{1296}$; ac tandem valorem istum in primâ; quâ ratione sors quæsita habetur $t \infty \frac{10355a}{22631}$, & relinquetur pro sorte collusoris B $\frac{12276a}{22631}$. unde sors A ad sortem B erit, ut 10355 ad 12276; uti Auctor invenit.

Idem verò etiam aliquantò compendiosiùs investigari potest, adhibitis tantùm tribus literis incognitis t, x & z, prætereundo sortem y, quam acquirit A, postquàm B uno jactu defunctus est. Ex Annot. Propos. XI. constat, quòd sors ejus, qui duobus jactibus semel septenarium jacere susciperet, esset $\frac{11}{36}$ depositi (quippe cùm a numerus omnium jactuum, ad c numerum eorum quibus non obtinetur septenarins, est in ratione 6 ad 5; & propterea $\frac{aa-cc}{aa} \infty \frac{11}{36}$) unde, per ea quæ ibid. ad lit. L monuimus, concludendum, 11 esse casus, quibus collusor B ludendi vicibus ad se devolutis alterutro suorum jactuum septenarium jaciat & vincat, ipseque A nihil acquirat; & 25 alios, quibus id neutro jactuum præstet, ludendique ordo inde ad A reversus huic sortem z pariat; id quod ipsi A, qui eo statu possidere supponitur x, tantundem valet ac si haberet $\frac{25z}{36}$; adeò ut $x \infty \frac{25z}{36}$. Cæteris enim positis ut priùs, si valor ipsius z suprà inventus hîc substituatur, invenietur ut ibi $x \infty \frac{125a+775t}{1296}$, & consequenter $t \infty \frac{10355}{22631}a$.

Atque hinc perspicitur methodus Auctoris, quam imitari convenit in omnibus similibus sortitionibus & ludis aleæ, in quibus plures continuò sortes incognitæ se mutuò excipiunt, dummodò post jactus aliquot pristina recurrat rerum facies, eædemque revertantur sortes incognitæ, quas aleatores ab initio ludi habuêre. Sed non tam facilè apparet, quo pacto illa Problemata tractanda sint, in quibus ludum prosequendo sortes nunquam in orbem redeunt, sed subinde aliæ novæ prodeunt à prioribus diversæ & æquè ignotæ, idque in infinitum; cujusmodi quidem nulla in hoc Auctoris Tractatu habentur. Eorum aliqua proposui olim in Ephemer.

 Erud.

Erud. Gall. 1685. art. 25, ſpe fretus fore, ut nonnemo illorum ſolutionem aggredi dignaretur, quam cùm toto quinquennio nemo dediſſet, ipſemet poſteà in Actis Erud. Lipſ. m. Maj. 1690. communicavi, ſecuto mox etiam fundamento ſolutionis ab ingenioſiſſimo Leibnitio ibid. m. Jul. ejusdem anni occultiùs exhibito, quod ego nunc apertiùs exponam. Prius autem oſtendam, quo pacto per illud præſens Auctoris Problema ſolvatur; nec enim differt hoc fundamentum ab eo, quo ad ſolutionem quoque præced. Propoſ. in annotat. fui uſus, eâdemque promiſcuè facilitate applicatur ad quæſtiones, in quibus eædem perpetuò expectationes in circulum redeunt, & in quibus nulla talis earum datur apocataſtaſis, hoc ſolo diſcrimine, quòd in prioribus ad ſeries infinitas unam pluresve, quarum ſummæ unâ aliquâ quantitate exprimi poſſunt; in poſterioribus verò ad alias ſeries haud æquè ſummabiles nos deducat.

Supponamus infinitos luſores, qui ſinguli ad ſingulos ſucceſſivè jactus admittantur, & quorum primus, quartus & quintus, octavus & nonus, & ſic porrò intermiſſis duobus ſemper duo ſequentes, ſenarii jactu: cæteri, ſecundus & tertius, ſextus & ſeptimus &c. ſeptenarii jactu vincere poſſint. Ac tum per Regulam annot. Prop. XII. annexam quærantur ſingulorum expectationes, quæ ſumto valore lit. a, b, c, e & f, ut in annot. præc. Prop. ita habebunt:

Coll.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	&c.
	A.	B.	B	A	A	B	B	A	A	B	B	A	
Exp.	$\frac{b}{a}$.	$\frac{ce}{aa}$.	$\frac{cef}{a^3}$.	$\frac{bcff}{a^4}$.	$\frac{bccff}{a^5}$.	$\frac{c^3eff}{a^6}$.	$\frac{c^3ef^3}{a^7}$.	$\frac{bc^3f^4}{a^8}$.	$\frac{bc^4f^4}{a^9}$.	$\frac{c^5ef^4}{a^{10}}$.	$\frac{c^5ef^5}{a^{11}}$.	$\frac{bc^5f^6}{a^{12}}$.	&c.

ſubſtitutis igitur in locum omnium eorum, qui ſenario vincunt, uno ſolo colluſore A; & in locum eorum, qui ſeptenario vincunt, uno ſolo B, habebimus caſum præſentis Problematis, indeque concludemus, ſortem ipſius A fore $\frac{b}{a} + \frac{bcff}{a^4} + \frac{bccff}{a^5} + \frac{bc^3f^4}{a^8} + \frac{bc^4f^4}{a^9} + \frac{bc^5f^6}{a^{12}}$ &c. & ſortem ipſius B, $\frac{ce}{aa} + \frac{cef}{a^3} + \frac{c^3eff}{a^6} + \frac{c^3ef^3}{a^7} + \frac{c^5ef^4}{a^{10}} + \frac{c^5ef^5}{a^{11}}$ &c. Et quia in utrâque hâc ſerie termini locorum tum

parium

parium tum imparium ſeparatim accepti Geometricas progreſſiones conſtituunt decreſcentes in ratione $\frac{ccff}{a^4}$, liquet hinc etiam ambarum ſummas in poteſtate haberi. Reperitur autem ſumma prioris ſeriei $\frac{a^3b+bcff}{a^4-ccff}$, & poſterioris $\frac{aace+acef}{a^4-ccff}$; ſic ut ratio ſortis A ad ſortem B ſit, ut $a^3b+bcff$ ad $aace+acef$, hoc eſt (factis a ∞ 36, b ∞ 5, c ∞ 31, e ∞ 6, & f ∞ 30) ut 372780 ad 441936, ſeu ut 10355 ad 12276, prorsùs ut ſuprà.

Sequuntur nunc exempla talium quæſtionum, ubi nulla datur ſortium apocataſtaſis: Sint duo Colluſores A & B certatim ludentes duabus teſſeris eâ lege, ut qui primus ſeptenarium jecerit vincat. Quæruntur eorum expectationes, ſi ludere debeant hoc ordine

I. A ſemel, B ſemel, A bis, B ſemel, A ter, B ſemel, A quater, B ſemel &c.
II. A ſemel, B ſemel, A ſemel, B bis, A ſemel, B ter, A ſemel, B quater &c.
III. A ſemel, B ſemel, A bis, B bis, A ter, B ter, A quater, B quater &c.
IV. A ſemel, B bis, A ter, B quater, A quinquies, B ſexies, A ſepties &c.

Hîc methodus analytica Auctoris nil proficit, ſed mea, eâdem quâ anteà facilitate quæſitum determinat. Loco duorum alternis ludentium A & B fingo rurſus luſores infinitos, quibus ſingulis ſinguli tantùm concedantur jactus, & quæro ſingulorum expectationes. Reperitur autem per Coroll. 1. Regulæ ad Prop. XII. notatæ, ob numeros caſuum a, b & c eosdem in omnibus aleis, expectatio cujusvis generaliter $\frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$, ubi m numerus jactuum, quibus ſeptenarius (unus b caſuum) præſtandus eſt, perpetuò valet 1; & n numerus omnium ab initio jactuum ſucceſſivè valet 1, 2, 3, 4 &c. his ergò ſubſtitutis ſequens naſcetur laterculus

Coll.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV. &c.
	A	B	B	A	A	A	B	B	B	B	A	A	A	A	A
Exp.	$\frac{b}{a}$	$\frac{bc}{aa}$	$\frac{bcc}{a^3}$	$\frac{bc^3}{a^4}$	$\frac{bc^4}{a^5}$	$\frac{bc^5}{a^6}$	$\frac{bc^6}{a^7}$	$\frac{bc^7}{a^8}$	$\frac{bc^8}{a^9}$	$\frac{bc^9}{a^{10}}$	$\frac{bc^{10}}{a^{11}}$	$\frac{bc^{11}}{a^{12}}$	$\frac{bc^{12}}{a^{13}}$	$\frac{bc^{13}}{a^{14}}$	$\frac{bc^{14}}{a^{15}}$ &c.

tum loco horum colluſorum repono duos A & B, utrique ea aſſignando loca, quæ juxta quæſtionis tenorem illi competunt, tan-

demque expectationes omnes his locis respondentes summatim colligo, ad constituendas expectationes totales utriusque. Sic quia juxta conditionem exempli 4^{ti} ipsi A debetur jactus primus, deinde 4^{tus}, 5^{tus}, 6^{tus}, porrò 11, 12, 13, 14, 15^{tus}, & sic deinceps, hinc expectationes collusorum his numeris designatorum, primi, 4^{ti}, 5^{ti}, 6^{ti} &c. in peculiarem seriem compingo; atque expectationes 2^{di}, 3^{tii}, 7^{mi}, & reliquorum, in quorum locum B succedit, in aliam seriem; quo pacto fiet sors ipsius A $\infty \frac{b}{a} + \frac{bc^3}{a^4} + \frac{bc^4}{a^5} + \frac{bc^5}{a^6} + \frac{bc^{10}}{a^{11}} + \frac{bc^{11}}{a^{12}} + \frac{bc^{12}}{a^{13}} + \frac{bc^{13}}{a^{14}} + \frac{bc^{14}}{a^{15}} +$ &c. & sors ipsius B $\infty \frac{bc}{aa} + \frac{bcc}{a^3} + \frac{bc^6}{a^7} + \frac{bc^7}{a^8} + \frac{bc^8}{a^9} + \frac{bc^9}{a^{10}} + \frac{bc^{15}}{a^{16}} + \frac{bc^{16}}{a^{17}} + \frac{bc^{17}}{a^{18}} +$ &c. indeque porrò, eliminando b ubique, & ejus loco surrogando $a - c$, sors A $\infty 1 - \frac{c}{a} + \frac{c^3}{a^3} - \frac{c^6}{a^6} + \frac{c^{10}}{a^{10}} - \frac{c^{15}}{a^{15}}$ &c. ut & sors B $\infty \frac{c}{a} - \frac{c^3}{a^3} + \frac{c^6}{a^6} - \frac{c^{10}}{a^{10}} + \frac{c^{15}}{a^{15}}$ &c. prioris complementum ad unitatem.

Idem adhuc aliter ita elicio: Pono denuò loco duorum A & B, infinitos lusores A, B, C, D, E, F, G, &c. sed unicuique eorum tot jactus continuè instituendos tribuo, quot pro tenore quæstionis conceduntur alterutri A vel B, quoties ludendi ordo de novo ipsum tangit. Verbi gratiâ, in exemplo antè allato quarto, pro eo quòd A ludere debet semel, B bis, hinc iterum A ter, B quater &c. concipio A ludere debere semel, B bis, alium C ter, alium D quater &c. tum separatim uniuscujusque sortem investigo, attendendo ad numerum jactuum cùm ab ipso instituendorum, tum etiam ab iis simul omnibus, qui eum ludendo præcedere debent; quod nullo negotio fit, postquàm jam supra in annotatis Propos. XI. (positis illorum numero n & horum s) sortem hanc generaliter ostendimus esse $\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}} \infty \frac{c^s}{a^s} - \frac{c^{n+s}}{a^{n+s}}$; sumtis enim in 4to exemplo pro n ordine numeris 1, 2, 3, 4 &c. & pro s numeris 0, 1, 3, 6, 10 &c. ceu summis ipsorum 1, 2, 3, 4 &c. ab initio collectis, emergent statim singulorum sortes, ut sequitur

Collus.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	&c.
Sortes:	$1 - \frac{c}{a}$.	$\frac{c}{a} - \frac{c^3}{a^3}$.	$\frac{c^3}{a^3} - \frac{c^6}{a^6}$.	$\frac{c^6}{a^6} - \frac{c^{10}}{a^{10}}$.	$\frac{c^{10}}{a^{10}} - \frac{c^{15}}{a^{15}}$.	$\frac{c^{15}}{a^{15}} - \frac{c^{21}}{a^{21}}$.	$\frac{c^{21}}{a^{21}} - \frac{c^{28}}{a^{28}}$.	&c.

quo

quo facto nil superest aliud, quàm ut omnium lusorum in locis imparibus A, C, E, G &c. nec non omnium in paribus B, D, F &c. expectationes in unam summam colligantur ad producendas, quæ antea, expectationes unius A & unius B alternatim ludentium, utpote quas summis illis æquari debere quivis per se videt. Nec differret operatio, si tres, quatuor pluresve collusores, in quæstione supponerentur.

Utrovis autem horum modorum etiam cæterarum quæstionum exempla solvuntur. Solutiones omnium sic habent (sumto compendii gratiâ $m \infty \frac{c}{a}$:

In qu. I. sors. $A \infty 1 - m + m^2 - m^4 + m^5 - m^8 + m^9 - m^{13} + m^{14} - m^{19} +$ &c.
$B \infty + m - m^2 + m^4 - m^5 + m^8 - m^9 + m^{13} - m^{14} + m^{19} -$ &c.
II . . $A \infty 1 - m + m^2 - m^3 + m^5 - m^6 + m^9 - m^{10} + m^{14} - m^{15} +$ &c.
$B \infty + m - m^2 + m^3 - m^5 + m^6 - m^9 + m^{10} - m^{14} + m^{15} -$ &c.
III . . $A \infty 1 - m + m^2 - m^4 + m^6 - m^9 + m^{12} - m^{16} + m^{20} - m^{25} +$ &c.
$B \infty + m - m^2 + m^4 - m^6 + m^9 - m^{12} + m^{16} - m^{20} + m^{25} -$ &c.
IV . . $A \infty 1 - m + m^3 - m^6 + m^{10} - m^{15} + m^{21} - m^{28} + m^{36} - m^{45} +$ &c.
$B \infty + m - m^3 + m^6 - m^{10} + m^{15} - m^{21} + m^{28} - m^{36} + m^{45} -$ &c.

Singulæ hæ sortes exprimuntur, ut videre est, per seriem aliquam infinitam, in quâ signa + & — perpetuò alternant, & cujus termini ex serie hâc continuè proportionalium $1 . m . m^2 . m^3 . m^4 . m^5$ &c. per saltus inæquales sunt excerpti, quod impedit illius summationem absolutam; Sed facilis est approximatio in numeris quantumlibet exactis. Sic positis $a \infty 36$, numero omnium casuum in tesseris duabus, & $c \infty 30$ numero eorum quibus non obtinetur præscriptus septenarius, adeoque $\frac{c}{a}$ seu $m \infty \frac{30}{36} \infty \frac{5}{6}$, reperitur sors ipsius A in primo exemplo $\frac{71931}{100000}$, in 2do $\frac{40058}{100000}$, in 3tio $\frac{59679}{100000}$, in 4to $\frac{52392}{100000}$; ubique non unâ centies millesimâ parte major minorve, ac proinde ratio sortis A, ad sortem B in 1mo ut 71931 ad 28069, in 2do ut 40058 ad 59942, in 3tio ut 59679 ad 40321, in 4to ut 52392 ad 47608.

Cæterùm qui examinabit indices potestatum quantitatis m, quæ

quæ terminos harum ſerierum conſtituunt, deprehendet illorum differentias ubique coïncidere cum ipſis numeris jactuum, qui colluſoribus A & B juxtà quæſtionis tenorem alternatim inſtituendi ſunt: Ita in primâ ſerie $1 - m + m^2 - m^4 + m^5 - m^8 + m^9$ &c. indices poteſtatum ordine ſunt $0, 1, 2, 4, 5, 8, 9$ &c. & indicum differentiæ $1, 1, 2, 1, 3, 1$ &c. præcisè reſpondentes numeris jactuum, quos hypotheſis primæ quæſtionis requirit, quippe quæ ipſi A 1, B 1, A 2, B 1, A 3, B 1 &c. jactus ordine tribuit. Operæ pretium autem eſt obſervare, hoc adeò generale eſſe, ut etiam valeat in iis exemplis, in quibus duobus alternatim ludentibus numeri jactuum aſſignantur, quales fortuitò è calamo ſcribentis fluere poſſunt, nullâ certâ & conſtante ratione progredientes; cùm iſta conſideratio regulam nobis ſuppeditet amborum ſortes momento exhibendi, quæ talis:

Regula pro cognoſcendâ ſorte duorum certatim ludentium, donec alteruter eorum vincat, quando utrique alternis vicibus aliquot aleæ jactus continuè inſtituendi conceduntur ſecundùm quoſvis numeros datos & in infinitum continuatos.

(Pono autem eoſdem regnare numeros caſuum ſeu eundem manere valorem quantitatis $\frac{c}{a}$ vel m in omnibus aleis.)

Scribantur ordine primò dati numeri jactuum utrique conceſſorum, dein ſummæ eorum ab initio collectæ; tum ſummæ hæ fiant indices totidem poteſtatum quantitatis m, quibus per ſigna + & — alternatim connexis habetur expectatio primi ludentis; omiſſâ verò unitate quæ ſemper primus ſeriei terminus eſt, ſignisque cæterorum inverſis habetur expectatio colluſoris. Ex. gr. Si alternatim inſtituere jubeantur, ipſe A jactus tres, B unum, A 4, B 1,

B 1, A 5, B 9, & ſic deinceps in infinitum, putà ſecundùm numeros Cyclometricos Ludolfi, qui nullâ determinatâ lege progrediuntur, erunt ordine numeri jactuum -- 3 1 4 1 5 9 2 6 5 &c. horumque ſummæ ab initio collectæ, 0, 3, 4, 8, 9, 14, 23, 25, 31, 36, &c. ac proinde ſors ipſius

A, $1 - m^3 + m^4 - m^8 + m^9 - m^{14} + m^{23} - m^{25} + m^{31} - m^{36} +$ &c.

B, $+ m^3 - m^4 + m^8 - m^9 + m^{14} - m^{23} + m^{25} - m^{31} + m^{36} -$ &c.

Nota, ſi numerus omnium jactuum ſit limitatus, ultra quem etſi neuter adhuc vicerit ludere prohibeantur, eadem regula valebit, niſi quòd ultimus terminus, cujus exponens ex omnium jactuum ſummâ conflatur, in illâ ſerie in quâ ſignum + habet redundat, adeoque abjiciendus, quo fit, ut expectationes amborum ſimul ſumptæ eodem illo termino deficiant ab unitate. Sic in præced. exemplo ſi poſt ultimò adſcriptum quinarium, h. e. poſt jactum 36tum eſſet ſubſiſtendum, fieret

ſors A, $1 - m^3 + m^4 - m^8 + m^9 - m^{14} + m^{23} - m^{25} + m^{31} - m^{36}$.

ſors B, $+ m^3 - m^4 + m^8 - m^9 + m^{14} - m^{23} + m^{25} - m^{31}$.

adeoque amborum ſimul $1 - m^{36}$.

PROBLEMA II.

TRes Colluſores A, B & C aſſumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri exiſtunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipſorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio ſit penès A, ſecunda penès B, & tertia penès C, & tum ſequens rurſus penès A, atque ſic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura ſit ratio illorum ſortium?

Senſus hujus Problematis ambiguus eſt, unde variis quoque ſolutionibus locus. Vel enim ſupponitur, electos calculos poſt ſingulas electiones in urnam recondendos eſſe, priusquàm ſequens eligit, ſic ut numerus eorum perpetuò maneat idem; vel non eſſe recondendos, ſic ut eorum numerus continuò decreſcat: deinde

ſupponi poteſt, vel à ſingulis aſſumptos eſſe 12 calculos, vel ab univerſis in commune.

I. Si calculi poſt ſingulas electiones ſint recondendi (quo quidem ſenſu nil intereſt, ſive in commune ſeu à ſingulis 12 calculi aſſumpti fuerint) quæſitæ colluſorum ſortes hâc ratione inveſtigantur:

1. *Methodo Auctoris.* Vocetur ſors primi x, ſecundi y, tertii z. Jam primus A cùm ludere incipit, 4 habet caſus ad vincendum ſeu obtinendum depoſitum, (ob 4 calculos albos), & 8 caſus (ob 8 nigros), quibus perdit ſuam præcedentiam & transfertur in ſtatum tertii, adeoque acquirit ſortem z; quod valet $\frac{4+8z}{12} \infty \frac{1+2z}{3}$; ac proinde ſors primi $x \infty \frac{1+2z}{3}$. Ob eandem rationem habet ſecundus B, cùm primus ludum inchoat, 4 caſus ad obtinendum nihil, & 8 caſus ad acquirendam præcedentiam, quâ transfertur in ſtatum primi acquiritque ſortem x; quod valet $\frac{8}{12}x \infty \frac{2}{3}x$, quare ſecundi ſors $y \infty \frac{2}{3}x$. Pariter quoque tertius C à principio habet 4 caſus ad nihilum, & 8 ad obtinendum ſecundum eligendi locum ſive ſecundi ſortem y; quod tantundem eſt ac $\frac{2}{3}y$; quocircà tertii ſors $z \infty \frac{2}{3}y$, hoc eſt, $y \infty \frac{3}{2}z$; & quia y etiam reperta fuit $\infty \frac{2}{3}x$, habetur $\frac{3}{2}z \infty \frac{2}{3}x$, hoc eſt, $z \infty \frac{4}{9}x$, qui valor ipſius z in primâ æquatione $x \infty \frac{1+2z}{3}$ ſubſtitutus exhibet $x \infty \frac{1}{3} + \frac{8}{27}x$, hoc eſt, $x \infty \frac{9}{19}$: unde porrò invenitur y $(\frac{2}{3}x)$ $\infty \frac{6}{19}$; & z $(\frac{2}{3}y)$ $\infty \frac{4}{19}$; ac propterea ratio ſortium x, y & z, ut 9. 6. 4.

2. *Methodo noſtrâ.* Poſito generaliter calculorum omnium numero a, alborum b, nigrorum c, concipiantur, ut jam ſæpiùs factum, infiniti colluſores, qui præſcriptâ conditione ludant, unusque poſt alterum calculum educat & reponat; erunt rurſus per Cor. 1. Reg. ad Prop. XII. exhibitæ propter invariatum manentem in omnibus electionibus alborum & nigrorum numerum, expectationes ſingulorum colluſorum ſequentes:

Col.

Coll.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.	&c.
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	
Exp.	$\frac{b}{a}$	$\frac{bc}{aa}$	$\frac{bcc}{a^3}$	$\frac{bc^3}{a^4}$	$\frac{bc^4}{a^5}$	$\frac{bc^5}{a^6}$	$\frac{bc^6}{a^7}$	$\frac{bc^7}{a^8}$	$\frac{bc^8}{a^9}$	$\frac{bc^9}{a^{10}}$	$\frac{bc^{10}}{a^{11}}$	$\frac{bc^{11}}{a^{12}}$	$\frac{bc^{12}}{a^{13}}$	$\frac{bc^{13}}{a^{14}}$	$\frac{bc^{14}}{a^{15}}$	&c.

unde cùm per hypoth. prima, 4ta, 7ma, 10ma &c. electiones sint penès A; 2da, 5ta, 8va, 11ma &c. penès B; 3tia, 6ta, 9na, 12ma &c. penès C; additis collusorum his locis respondentium expectationibus in unám summam, habetur expectatio unius

$$\left.\begin{array}{l} A \infty \frac{b}{a} + \frac{bc^3}{a^4} + \frac{bc^6}{a^7} + \frac{bc^9}{a^{10}} + \frac{bc^{12}}{a^{13}} + \&c. \\ B \infty \frac{bc}{aa} + \frac{bc^4}{a^5} + \frac{bc^7}{a^8} + \frac{bc^{10}}{a^{11}} + \frac{bc^{13}}{a^{14}} + \&c. \\ C \infty \frac{bcc}{a^3} + \frac{bc^5}{a^6} + \frac{bc^8}{a^9} + \frac{bc^{11}}{a^{12}} + \frac{bc^{14}}{a^{15}} + \&c. \end{array}\right\} \text{ob progr. geom.} \left\{\begin{array}{l} \infty \frac{aab}{a^3 - c^3}, \\ \infty \frac{abc}{a^3 - c^3}, \\ \infty \frac{bcc}{a^3 - c^3}, \end{array}\right.$$

adeoque ratio sortium, ut $aa. ac. cc$, id est, hic (ob $a. c$ :: 12. 8 :: 3. 2) ut 9. 6. 4 ut anteà. Nota, si quæstio proponeretur in collusoribus quatuor, sortes eorum eodem pacto repertum iri se habere, ut $a^3. aac. acc. c^3$; & si generaliter in collusoribus n, ut $a^{n-1}. a^{n-2}c. a^{n-3}cc.$ &c. pergendo semper in ratione continuâ a ad c.

II. Si porrò sensus Problematis sit, ut assumpti in commune calculi 12 non reponantur, postquàm ex urnâ exempti fuerint; observandum est, quòd per continuam eductionem calculorum nigrorum, primus quidem collusor transeat in locum tertii, tertius in locum 2di, secundus in locum primi, non idcircò tamen pariter sortes, quas ab initio ludi habuère, invicem permutent, ut factum fuit in præc. hyp. sed quod subinde alias novas & à prioribus diversas ob mutatum calculorum numerum acquirant, easque tamen simpliciores quò plures calculi nigri educti fuerint, atque ita comparatas, ut tandem desinant in sortes omnino cognitas. Quapropter incipiendo consuetâ Auctoris methodo ab omnium simplicissimis, & pergendo retrò per omnes intermedias, perveniemus ultimò solâ synthesi utendo ad casum in quæstione propositum.

Hunc in finem supponamus, eductos jam esse 7 calculos nigros, adeoque proximum eligendi locum ipsi B deberi. Sic pri-

 mus

mus A nihil ampliùs expectabit; quandoquidem reliquorum alteruter B vel C ob residuum nigrum unicum necessariò album educet & vincet. Secundus verò B ob 4 albos 4 habebit casus ad vincendum, unumque ob residuum nigrum ad perdendum; quandoquidem si hunc eduxerit, tertius C infallibiliter vincet. Sed ob eandem rationem tertius C 4 habebit casus ad perdendum & unum ad vincendum. Unde colligimus, sortes trium A, B, C, eo casu fore $0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}$.

Supponamus deinde, eductos esse nigros sex. Sic habebunt, primus quidem A, quem proximus tunc ludendi ordo tangit, 4 casus ad vincendum, totidemque ad perdendum duo reliqui: omnes verò tres ob residuos duos nigros duos casus ad obtinendum præcedentes suas expectationes, quandoquidem altero horum educto unicus restat niger, ordoque ludendi ipsum B poscit, qui casus est præced. hypothesis. Unde sortes ipsorum nunc sunt $\frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{1}{15}$.

Fingamus porrò, eductos esse nigros quinque. Sic habebit tertius C, quem tangerent eligendi vices, ad vincendum; reliquique duo ad perdendum 4 casus: ob residuos autem tres nigros, quivis illorum etiam 3 habet casus ad expectationem suam modò inventam. Unde jam sortes ipsorum fiunt, $\frac{2}{7}, \frac{4}{35}, \frac{3}{5}$.

Rursus si educti concipiantur nigri quatuor, sic ut æqualis alborum & nigrorum numerus supersit, erit una medietas casuum pro B, utpote penès quem tunc proxima foret electio, eademque contra A & C; altera verò medietas omnes tres ad præcedentes expectationes promovebit. Unde nascuntur sortes $\frac{1}{7}, \frac{39}{70}, \frac{3}{10}$.

Eâdem ratione si educti sint nigri tres, inveniuntur sortes $\frac{11}{21}$, $\frac{13}{42}, \frac{1}{6}$.

Si nigri duo, $\frac{11}{35}, \frac{13}{70}, \frac{1}{2}$. Si niger unus, $\frac{1}{5}, \frac{53}{110}, \frac{7}{22}$.

Si denique nullus adhuc calculus eductus fuerit, quem solum casum primò intendimus, & propter quem præcedentes omnes expedire priùs oportuit, sortes collusorum A, B, C, simili modo reperiuntur $\frac{7}{15}, \frac{53}{165}, \frac{7}{33}$, sive ad idem nomen reductæ $\frac{77}{165}, \frac{53}{165}, \frac{35}{165}$; sic ut optata ratio sortium sit, ut 77, 53, 35.

Methodus porrò nobis familiaris etiam in præsente hypothesi locum

locum habet; neque enim hanc magis respuunt eæ quæstiones, quæ communiter solâ synthesi solvuntur, quàm quæ analysi opus habent. Quoniam octo sunt calculi nigri non reponendi, postquam educti fuerint, fingo novem esse collusores, qui singuli ordine singulas electiones instituant; quo fiet ut unus eorum necessariò tandem album educat ac vincat. Nullus autem spem vincendi habere potest, nisi omnes ipsum præcedentes continuò nigros eduxerint; quocircà suppono horum numerum (cui casuum numerus proportionatur) gradatim minui, atque post primam electionem superesse calculos nigros septem, post 2^{dam} sex, post 3^{tiam} quinque, & sic deinceps; indeque singulorum collusorum sortes per Regulam Prop. XII. annexam elicio, juxta sequentem laterculum:

Collus.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
	A	B	C	A	B	C
Num.omn.cal. a	12	11	10	9	8	7
albor. b	4	4	4	4	4	4
nigr. c	8	7	6	5	4	3
Expectat.	$\frac{4}{12}$.	$\frac{4\cdot 8}{11\cdot 12}$.	$\frac{4\cdot 7\cdot 8}{10\cdot 11\cdot 12}$.	$\frac{4\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{9\cdot 10\ldots 12}$.	$\frac{4\cdot 5\cdot 6\ldots 8}{8\cdot 9\cdot 10\ldots 12}$.	$\frac{4\cdot 4\cdot 5\ldots 8}{7\cdot 8\cdot 9\ldots 12}$.

Collus.	VII.	VIII.	IX.
	A	B	C
Num.calc.omn. a	6	5	4
albor. b	4	4	4
nigr. c	2	1	0
Expect.	$\frac{4\cdot 3\cdot 4\ldots 8}{6\cdot 7\cdot 8\ldots 12}$.	$\frac{4\cdot 2\cdot 3\ldots 8}{5\cdot 6\cdot 7\ldots 12}$.	$\frac{4\cdot 1\cdot 2\ldots 8}{4\cdot 5\cdot 6\ldots 12}$.

tum, quia prima, 4ta & 7ma electiones debentur ipsi A; 2da, 5ta & 8va ipsi B; 3^{tia}, 6ta & 9na ipsi C; expectationes collusorum his numeris designatorum collectivè accipio, & habebo pro expectatione ipsius A, $\frac{4}{12} + \frac{4\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12} + \frac{4\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}$; B, $\frac{4\cdot 8}{11\cdot 12} + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12} + \frac{4\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}$; C, $\frac{4\cdot 7\cdot 8}{10\cdot 11\cdot 12} + \frac{4\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12} + \frac{4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}$; quæ fractiones omnes ad nomen commu-

ne 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12, reductæ numeratores nanciscuntur sequentes: 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11 + 4. 5. 6. 7. 8. 6. 7. 8 + 4. 5. 3. 4. 5. 6. 7. 8 ∞ 4. 5. 6. 7. 8 in 3. 4. 5 + 6. 7. 8 + 9. 10. 11, 4. 5. 6. 7. 8. 8. 9. 10 + 4. 5. 6. 7. 8. 5. 6. 7 + 4. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 ∞ 4. 5. 6. 7. 8 in 2. 3. 4 + 5. 6. 7 + 8. 9. 10, 4. 5. 6. 7. 8. 9. 7. 8 + 4. 5. 6. 4. 5. 6. 7. 8 + 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 ∞ 4. 5. 6. 7. 8 in 1. 2. 3 + 4. 5. 6 + 7. 8. 9, unde eliso communi factore 4. 5. 6. 7. 8, ratio sortium exurgit, ut 3. 4. 5 + 6. 7. 8 + 9. 10. 11, 2. 3. 4 + 5. 6. 7 + 8. 9. 10, 1. 2. 3 + 4. 5. 6 + 7. 8. 9, seu divid. per 6, ut 10 + 56 + 165 ∞ 231, 4 + 35 + 120 ∞ 159, 1 + 20 + 84 ∞ 105, rursusque divid. per 3, ut 77, 53, 35, uti suprà. Et quia in numeris istis certam progressionis legem observamus, facile possemus regulam dare generalem pro numero collusorum & calculorum quocunque, si tanti referret his immorari.

III. Tertio sensu acceptum Problema (cùm singuli trium collusorum assumunt 12 calculos, aliusque post alium è suis unum depromit & non recondit) parùm differt à præcedente hypothesi, nisi quòd ob auctum calculorum numerum multò prolixiorem operam deposcit.

Supponamus primò, ipsis A & B nullum ampliùs superesse calculum nigrum, ipsi C verò adhuc unum, quem propterea eligendi vices tangent. Is propter 4 calculos albos & 1 nigrum, 4 habet casus ad vincendum & unum ad perdendum; quandoquidem si hunc eduxerit, ipse A cui non nisi albi supersunt infallibiliter vincet: sed & ob eandem rationem primus A vicissim 4 habet casus ad perdendum & unicum ad vincendum; secundo verò B nihil omninò relinquitur, eò quòd alterutri reliquorum necessariò cedet victoria. Unde colligitur, sortes ipsorum A, B, C, fore $\frac{1}{5}$, 0, $\frac{4}{5}$.

Supponamus deinde, ipsi A restare nullum, & singulis reliquorum unum nigrum. Sic ipse B, quem eligendi ordo tangit, 4 ad vincendum casus habet, totidemque ad perdendum reliqui;

unus

unus verò casus est, qui unicuique illorum præcedentis casus expectationem affert; id quod ipsis A, B, C, sortem parit $\frac{1}{25}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{25}$.

Supponamus tertiò, singulis A, B & C, restare unum calculum nigrum. Sic A quem penès proxima electio est, 4 habebit ad vincendum, reliquique ad perdendum casus; unum verò, quo perducuntur omnes tres ad præcedentes suas expectationes. Unde nascuntur ipsis sortes $\frac{101}{125}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{4}{125}$; quas inter ratio est, ut 101, 20, 4.

Eodem modo ulteriùs investigandum esset, quid deberetur collusoribus A, B & C, cùm ipsis restant calculi nigri, 1.1.2, 1.2.2, 2.2.2, 2.2.3, 2.3.3, 3.3.3, &c. quousque perveniretur ad casum propositum, qui singulis collusoribus 8 nigros calculos attribuit. Sed quia hæc sigillatim persequi supra modum tædiosum foret, idcircò ostendam, quo pacto quæsitum per saltum obtineri queat, inveniendo solummodò sortes illorum statuum, in quibus unicuique collusorum æqualis nigrorum calculorum numerus superest; quem numerum semper vocemus c, sicuti alborum b, & omnium $a \propto b+c$.

Oportet primò considerare omnes variationes, quæ accidere possunt cùm unusquisque collusorum unum calculum è suis depromit; perspicuum autem est fieri posse, ut vel omnes tres educant album calculum, vel duo tantùm, vel unus, vel nullus. Deinde attendendum, quot casus singulis harum variationum respondeant; quorum quidem numerus hoc modo initur: Si quis certaret fore, ut omnes tres educant album, ejus sors foret $\frac{b^3}{a^3}$: si futurum contenderet, ut duo A & B, vel duo A & C, vel B & C, album eligant & tertius nigrum, sortem haberet $\frac{bbc}{a^3}$: si propugnaret fore, ut solus A vel B vel C album eximat, reliqui nigrum, sortem possideret $\frac{bcc}{a^3}$: si denique nulli album concedere vellet, sortem obtineret $\frac{c^3}{a^3}$, (quæ omnia ex Cor. 1. Regulæ Prop. XII. subjunctæ patescunt, cùm tantundem hæc valeant, acsi ipse in æquali numero casuum tribus jactibus quippiam præcisè ter, aut bis, aut semel,

præ-

præſtandum aut planè non præſtandum ſuſciperet:) quamobrem, per ea quæ ad lit. I. Prop. XI. annotavimus, rejecto fractionum harum communi denominatore ſignificabunt numeratores numeros caſuum, quibus unusquisque horum eventuum contingere poteſt.

Tertiò denique obſervandum, quòd juxta tenorem Problematis primus A victoriâ potiri debeat, quotiescunque ſive ſolus ſive cum alterutro reliquorum ſive cum utroque album calculum elegerit; ſecundus autem B, ſive ſolus ſive junctim cum C id præſtiterit; & tertius C, non niſi cum ſolus id effecerit: quotiescunque verò evenerit, ut nullus trium album educat, quòd tunc ſinguli perveniant ad ſortes, quis habere inventi ſunt, cùm nigri uno pauciores ipſis ſupereſſe ponebantur. Quapropter additis in unum caſibus, qui cuique tum favent tum adverſantur, invenimus primum A habere $b^3+2bbc+bcc$ caſus ad vincendum ſeu obtinendum depoſitum 1, & $bbc+2bcc$ caſus ad perdendum; ſecundum B $bbc+bcc$ ad vincendum & $b^3+2bbc+2bcc$ ad perdendum; & tertium C bcc ad vincendum & $b^3+3bbc+2bcc$ ad perdendum: omnes verò tres habere c^3 caſus, qui ipſos ad ſortes jam anteà inveſtigatas perducunt; quæ ſortes ſi dicantur $\frac{p}{p+s+t}$. $\frac{s}{p+s+t}$. $\frac{t}{p+s+t}$; fiet per Prop. III. expectatio ipſius

$$\text{A} \infty \frac{\overline{b^3+2bbc+bcc} \text{ in } 1 + \overline{bbc+2bcc} \text{ in } 0 + c^3 \text{ in } p : \overline{p+s+t}}{a^3}.$$

$$\text{B} \infty \frac{\overline{bbc+bcc} \text{ in } 1 + \overline{b^3+2bbc+2bcc} \text{ in } 0 + c^3 \text{ in } s : \overline{p+s+t}}{a^3}.$$

$$\text{C} \infty \frac{bcc \text{ in } 1 + \overline{b^3+3bbc+2bcc} \text{ in } 0 + c^3 \text{ in } t : \overline{p+s+t}}{a^3}.$$

hoc eſt, eliſo communi nomine & factâ multiplicatione per $\frac{p+s+t}{c^3}$, erit ratio ſortium ipſorum A, B, C, ut

$$\left.\begin{array}{r} \overline{b^3+2bbc+bcc} \\ \overline{bbc+bcc} \\ bcc \end{array}\right\} \text{ in } \frac{\overline{p+s+t}}{c^3} \left\{\begin{array}{l} +p. \\ +s. \\ +t. \end{array}\right.$$

Quibus

Quibus ita præmissis, ut ad solutionem nostri Problematis revertamur, supponendum porrò est, singulis collusorum restare duos calculos nigros: Sic lit. *b* & *c* valebunt 4 & 2 (pro quibus substitui possunt minimi in eâdem ratione termini 2 & 1); & quia ratio sortium in casu præcedenti cùm singulis unus restabat calculus niger, quam literis *p*, *s*, *t* indigitamus, expressa fuit per numeros 101, 20, 4, quorum summa $p+s+t \infty 125$; hinc juxta præmissam formulam expeditè inveniuntur numeri 2351, 770, 254, exprimentes rationem sortium, quas collusores in casu præsenti possident.

Eodem pacto, si singulis tres nigri superesse supponuntur; quo casu lit. *b* & *c* valent 4 & 3, ipsæque *p*, *s*, *t* numeros modò inventos 2351, 770, 254; ratio sortium reperitur designari per numeros 26851, 11270, 4754.

Si residui sint singulis 4 nigri, sic ut valor lit. *b* & *c* sit 4 & 4 (hoc est, in minimis terminis 1 & 1) inveniuntur sortes se habere in ratione 198351, 97020, 47629.

Si restent singulis nigri 5, hoc est, si lit. *b* & *c* valeant 4 & 5, habetur ratio sortium in numeris 1087407, 590940, 322029; seu dividendo per 9, in 120823, 65660, 35781.

Si singulis supersint nigri 6, adeoque valor lit. *b* & *c* sit 4 & 6, seu 2 & 3; exprimetur ratio sortium per 532423, 312620, 183957.

Si singulis adhuc remaneant nigri 7, sic ut lit. *b* & *c* significent 4 & 7, prodibit ratio sortium in numeris 1984423, 1236620, 771957.

Si denique nullo adhuc calculo educto omnes 8 nigri singulis supersint, literæque *b* & *c* valeant 4 & 8, hoc est, 1 & 2, qui quidem casus is est, quem nobis enodandum proposuimus, & cujus gratiâ præcedentes omnes expedire priùs necessum habuimus, invenimus, quòd optata ratio sortium collusorum A, B, C, designetur per numeros 6476548, 4231370, 2768457.

Applicationem methodi nobis usitatæ ad hanc hypothesin Lector ipse si vult instituet. Nos illam brevitatis gratiâ præterimus.

PROBLEMA III.

A Certat cum B quòd ipſe ex 40 chartis luſoriis, id eſt, 10 cujusque ſpeciei, 4 chartas extracturus ſit; ita ut ex unaquaque ſpecie habeat unam. Et invenitur ratio ſortis A ad ſortem B ut 1000 ad 8139.

Solutio: Pone primò, jam tres diverſarum ſpecierum chartas extractas eſſe; quo facto ex unaquâque harum ſpecierum adhuc remanebunt 9, hoc eſt, ex omnibus tribus ſpeciebus 27 folia, & ex quartâ ſpecie 10. Unde conſtat, quòd quartum folium extracturus habeat 27 caſus ad perdendum, & 10 ad vincendum; id quod ipſi valet $\frac{10}{37}$ depoſiti.

Pone deinde, duas differentium ſpecierum chartas extractas eſſe; quâ ratione ex iisdem ſpeciebus adhuc reſtant folia 18, ſicut ex reliquis duabus folia 20. Quapropter tertium folium exempturus 18 caſus habet ad perdendum, & 20 ad obtinendum tres chartas diverſarum ſpecierum, hoc eſt, ad obtinendum præcedentem expectationem $\frac{10}{37}$; id quod ei ſortem parit $\frac{100}{703}$.

Pone tertiò, extractam eſſe unam chartam; ſic ex eâdem hâc ſpecie, cujus eſt extracta, ſuperſunt chartæ 9, ex reliquis verò tribus ſpeciebus chartæ 30. Idcircò ſecundum folium accepturus 9 habet caſus ad perdendum, & 30 ad acquirendum diverſæ ſpeciei folium, hoc eſt, ad impetrandam ſortem modò inventam $\frac{100}{703}$; id quod tantundem eſt ac ſi haberet $\frac{1000}{9139}$.

Si nulla adhuc charta extracta ſit, ſors extrahentis eadem eſt cum præcedente, manetque $\frac{1000}{9139}$; quoniam omnes 40 caſus ipſum neceſſariò in eum ſtatum conjiciunt, qui in paragrapho præced. ſuppoſitus fuit. Quare tum etiam ſors contracertantis erit $\frac{8139}{9139}$; & ratio ſortium, ut 1000 ad 8139, quemadmodùm habet Auctor.

Ejusdem Problematis ſolutio etiam aliter per Combinationum doctrinam confici poteſt, uti parte tertiâ poſt hujus doctrinæ explicationem oſtendemus.

PRO-

PROBLEMA IV.

Assumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus sit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B.

Etiam istud Problema in tertiam libri partem rejicere cogimur, quoniam ad ejus solutionem artis combinatoriæ notitia prærequiri videtur.

PROBLEMA V.

A & B assumentes singuli 12 nummos ludunt tribus tesseris hâc conditione: ut, si 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipsi B; at si 14 puncta jaciantur, B tradat nummum ipsi A; & ut ille ludum victurus sit, qui primùm omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B, ut 244140625 ad 282429536481.

Solutio: Considerandum primò, in tribus tesseris contineri 216 jactus diversos, & inter hos dari 15 jactus punctorum quatuordecim, & 27 jactus punctorum undecim; adeoque 15 casus esse in quolibet jactu, quibus efficitur ut aleator A à collusore B nummum accipiat, & 27 casus quibus contingit ut hic ab illo nummum consequatur; alios verò 174 casus, quibus uterque eundem nummorum numerum pristinamque proin sortem retinet.

Deinde attendendum, quòd illi 174 casus irriti, quibus collusorum sortes invariatæ manent, per 4 Coroll. 3. dissimulari possint ac si prorsùs abessent, inque tesseris tribus solummodò 42 reperirentur jactus, quorum 15 ipsum A nummo potiri faciant, & 27 ipsum B.

Tertiò & illud considerandum, quòd pro numeris casuum 42, 15 & 27, utpote compositis inter se substitui possint per 2

Cor. 3, minimi in eâdem ratione termini 14, 5 & 9; in quorum tamen rursus locum, ut generalior fiat solutio, nos literas a, b & c surrogamus.

Quibus animadversis in enodatione propositæ quæstionis ita deinceps progredior, ut inquiram ordine, quænam futuræ fuissent collusorum sortes, si singuli assumpsissent nummum unum, deinde si duos, posteà si tres, quatuor &c. quousque per inductionem pateat, quænam iis sortes nunc competant, ubi singuli assumserunt nummos 12.

Si singuli assumant nummum unum, perspicuum est, sortes eorum fore in ratione ipsorum numerorum b & c.

Si singuli accipiant nummos duos, primus jactus efficiet, ut collusor A vel 3 possideat nummos, vel ut unus tantùm ei supersit. Si tres possidet, habet b casus ad acquirendum omnes quatuor, hoc est, ad vincendum seu obtinendum depositum 1; & c casus, quibus ei relinquuntur nummi duo, hoc est, quibus revertitur ad sortem initiò positam, quam vocare lubet z; quod proin valet $\frac{b+cz}{a}$. Si unicus illi nummus superest, habet b casus ad recuperandum duos, hoc est, sortem z; & c casus ad perdendum ludum; id quod efficit $\frac{bz}{a}$. Atqui ut post primum jactum tres nummos numeret, rursus b sunt casus; c verò casus quibus ipsi unus tantùm relinquitur. Itaque ab initio b casus extant qui ei dent $\frac{b+cz}{a}$, & c qui dent $\frac{bz}{a}$; id quod sortem gignit $\frac{bb+2bcz}{aa}$: quare $z \propto \frac{bb+2bcz}{aa}$, sive $z \propto \frac{bb}{aa-2bc} \propto \frac{bb}{bb+cc}$, & relinquitur collusori B $\frac{cc}{bb+cc}$; adeò ut sortes ipsorum sint in ratione bb ad cc.

Si singuli assumant nummos tres, primo jactu continget, ut collusor A vel 4 nummorum compotem se videat, vel ut duorum tantùm; in quibus statibus expectationes ejus appellentur x & y. Si quatuor nummorum compos est, ulteriùs vel ipse primus ab altero duos nummos impetrabit ac vincet, vel ab ipso duos consequetur

quetur alter, sic ut ei relinquantur adhuc nummi duo: sed ut ipse primus duos proximos nummos consequatur, bb casus præstò sunt, & cc casus quibus idem alteri obtingit (uti ex eo quod modò ostensum est collato cum annot. Propos. XI. ad lit. I colligitur) quapropter bb casus habet ad 1, & cc casus ad sortem y, quod ei valet $\frac{bb+ccy}{bb+cc}$; cumque id ipsum etiam appellemus x, erit $x = \frac{bb+ccy}{bb+cc}$, seu $y = \frac{bbx+ccx-bb}{cc}$. Similiter cùm duo tantum ipsi restant nummi, bb casus habet ad recuperandum adhuc duos alios, hoc est, ad impetrandam sortem x, & cc casus ad perdendum suos & cum iis omne depositum; quod tantundem est ac si haberet $\frac{bbx}{bb+cc}$; cumque tum etiam habere supponatur y, fiet $y = \frac{bbx}{bb+cc}$; sed suprà inventa quoque $y = \frac{bbx+ccx-bb}{cc}$; quare $\frac{bbx+ccx-bb}{cc} = \frac{bbx}{bb+cc}$; atque hinc $x = \frac{b^4+bbcc}{b^4+bbcc+c^4}$; nec non y $\left(= \frac{bbx}{bb+cc}\right) = \frac{b^4}{b^4+bbcc+c^4}$. Quo facto demùm accedendum ad statum initiò positum, cogitandumque quòd ubi singuli tres nummos assumunt, b casibus contingere possit, ut collusor A post primum jactum 4 nummos possideat, hoc est, ut sortem x seu $\frac{b^4+bbcc}{b^4+bbcc+c^4}$ acquirat; & c casibus, ut duos residuos habeat nummos, id est, ut sortem y sive $\frac{b^4}{b^4+bbcc+c^4}$ consequatur. Unde tunc ejus expectatio fiet $\frac{b^5+b^4c+b^3cc}{b^5+b^4c+b^3cc+bbc^3+bc^4+c^5} =$ (institutâ per $bb+bc+cc$ divisione) $\frac{b^3}{b^3+c^3}$, & relinquetur collusori B $\frac{c^3}{b^3+c^3}$; sic ut sortes eorum nunc sint in ratione b^3 ad c^3.

Quandoquidem igitur sortes collusorum A & B inveniuntur se habere in ratione simplici numerorum b & c, cùm à singulis unus nummus assumitur; & in ratione duplicatâ horum numerorum, cùm à singulis assumuntur duo; & in triplicatâ, cùm tres: factâ inductione colligimus, quòd acceptis etiam quotlibet nummis sortes istæ perpetuò futuræ sint in ratione toties multiplicatâ numerorum b & c, quot nummi à singulis fuerint assumpti; & quòd

per consequens in proposito Auctoris exemplo, ubi ab unoquoque 12 assumpti supponuntur, sortes hæ se habeant, ut b^{12} & c^{12}, hoc est, restituendo 5 & 9, pro b & c, ut 244140625 & 282429536481; quemadmodùm habet Auctor. Quod ipsum etiam vel absque calculo utcunque sic inferri potest: A habens omnes nummos præter unum habet b casus ad vincendum, & B habens omnes præter unum, habet c casus ad vincendum; dein A habens omnes nummos præter duos habet b casus ad obtinendum omnes præter unum, id est, ad b casus præcedentes, ideoque b vicibus b casus seu bb casus habet ad vincendum; & B habens omnes præter duos ob similem rationem habet cc casus ad vincendum: atque ita pro singulis nummis qui collusoribus ad vincendum desunt, præstò sunt ipsi A b, & ipsi B c casus, quibus ipsis accessus fit ad casus præcedentes; quare cùm ab initio ludi uterque habeat nummos 12, & proinde utrique totidem ad vincendum deficiant, numeri b & c duodecies positi ac in se ducti exhibebunt rationem sortium, ut anteà.

Quòd si quis tamen ratiocinium istud non sat evidentiæ habere existimet, neque etiam inductioni satis fidat, is deinceps simili compendio, quo Auctor in Propos. XI. usus fuit, progredi poterit, nempe transeundo statim ad nummos sex, & hinc ad duodecim, omissis omnibus intermediis casibus. Quanquam ne sic quidem ulteriori calculo indigemus; idem enim qui supra subductus habetur in hypothesi duorum assumtorum nummorum, etiam valet, si loco unius nummi quotlibet n nummos, & loco duorum in nummos assumtos intelligamus, dummodò pro numeris casuum b & c quibus alterutri collusorum unus nummus acquiritur vel deperditur substituamus quoque numeros casuum, quibus ille n nummos acquirere vel amittere potest; adeò ut hinc legitimè inferamus, rationem sortium quas habent collusores cùm singuli $2n$ nummos assumunt perpetuò duplicatam esse debere ejus quæ obtinet cùm singulis tantùm n nummi assumpti sunt. Quare cùm suprà in casu trium assumtorum nummorum ratio sortium reperta sit ut b^3 ad c^3, erit illa in casu nummorum 6 ut b^6 ad c^6, indeque porrò in casu nummorum 12 ut b^{12} ad c^{12}, quemadmodum inductione collegeramus.

Et

Et ſic quidem liquet de ſortibus colluſorum, cùm ambo æquè multos nummos acceperunt; ſed nondum conſtat de ſortibus quas acquirunt in quolibet ſtatu, in quem ludum proſequendo pervenire poſſunt, quando uni plures, alii pauciores nummi contigêre. Interim etiam pro iſtis regula generalis datur; poſito namque m pro numero nummorum quos habet A, & n pro numero eorum quos habet B, reperio quòd ratio ſortis A ad ſortem B ſemper ſit futura, ſi b & c æquantur, ut m ad n; ſin c excedit b, ut $b^n c^m - b^{m+n}$ ad $c^{m+n} - b^n c^m$; quorum demonſtratio, cùm operoſiorem calculum depoſcat, Lectori enodanda relinquitur. Nos verò absque ulteriore morâ ad alteram propoſiti noſtri partem transimus.

ARTIS

ARTIS CONJECTANDI
PARS SECUNDA,

continens

Doctrinam de Permutationibus & Combinationibus.

Proœmium.

INfinitam varietatem, quæ cùm in naturæ operibus, tùm in actionibus mortalium elucet, quæque præcipuam hujus Universi pulcritudinem constituit, non aliunde quàm ex diversimodâ compositione, mixturâ & transpositione partium ejus inter se originem ducere palàm est. Sed quia multitudo rerum ad effectum aliquem producendum concurrentium sæpenumerò tanta est tamque varia, ut difficillimum sit recensere vias omnes, quibus earundem compositio vel mixtura fieri vel non fieri potest, hinc fit ut nullum sit vitium, in quod homines etiam maximè prudentes & circumspecti frequentiùs incidant illo, quod Logici communiter appellant *insufficientem enumerationem partium*; adeò quidem ut non verear

verear dicere, hanc unicam ferè ſcaturiginem eſſe infinitorum eorumque graviſſimorum errorum, quos in ratiociniis noſtris circa res tum cognoſcendas tum agendas quotidie committimus. Quare merito ſuo utiliſſima cenſenda eſt Ars, *Combinatoria* dicta, quæ huic mentis noſtræ defectui medetur, docetque ſic enumerare modos omnes poſſibiles, ſecundùm quos res plures permiſceri, transponi vel conjungi invicem poſſunt, ut certi ſimus, nos nullum eorum prætermiſiſſe, qui inſtituto noſtro conducere valent. Quanquam enim hoc negotii eatenùs ſit conſiderationis Mathematicæ, quatenùs in ſubducendo calculo terminatur; ſi tamen uſum & neceſſitatem ſpectes, univerſale prorſus eſt & ita comparatum, ut ſine illo nec ſapientia Philoſophi, nec Hiſtorici exactitudo, nec Medici dexteritas, aut Politici prudentia conſiſtere queat. Argumento ſit hoc unicum, quòd omnis horum labor in *conjectando*, & omnis conjectura in trutinandis cauſarum complexionibus aut combinationibus verſatur. Unde quoque nonnulli eximii Viri, ac nominatim Schootenius, Leibnitius, Walliſius, Preſtetus, materiam hanc ſibi tractandam ſumpſêre, ne quis exiſtimet nova eſſe hîc omnia quæ prolaturi ſumus; tametſi quædam non contemnenda de noſtro adjecimus, inprimis demonſtrationem generalem & facilem proprietatis numerorum figuratorum, cui cætera pleraque innituntur, & quam nemo quod ſciam ante nos dedit eruitve. Cùm itaque nondum plenum Artis ſyſtema habeamus, tum verò ne illa quæ habemus aliunde petere ſit opus, viſum eſt totam Doctrinam ab ovo ordiri ac ne quid indemonſtratum relinquatur ex primis fundamentis eruere; quod tamen breviter fiet &

ſuccinctè, nec niſi in quantum inſtituti noſtri ratio exigere videtur. Totam Tractationem ad duo ſumma capita referimus, quorum unum Permutationum, alterum Combinationum doctrinam perſequitur; cui accedit tertium, quod utrasque mixtim contemplatur.

CAPUT I.

De Permutationibus.

Permutationes rerum voco Variationes, juxta quas ſervatâ eâdem rerum multitudine ordo ſitusque inter ipſas diverſimodè permutatur.

Itaque ſi quæratur, quoties nonnullæ res transponi vel permiſceri invicem poſſint, ſic ut ſemper accipiantur omnes ſolo ordine ſituve mutato, dicentur quæri omnes Permutationes rerum illarum.

Res autem permutandæ vel omnes poſſunt eſſe diverſæ, vel aliquot earum eædem; quæ quidem per totidem Alphabeti literas ſive diverſas ſive easdem commodè deſignabuntur.

1. *Si res omnes permutandæ ſunt diverſæ:*

Cùm numerus permutationum in rebus pluribus iniri nequeat, niſi idem priùs in omnibus aliis numero paucioribus compertus habeatur, liquet in hâc inquiſitione utendum viâ ſyntheticâ, h. e. ordiendum nobis eſſe ab hypotheſibus omnium primis & ſimpliciſſimis:

Unius rei vel literæ *a*, una tantùm ſumtio vel poſitio eſt.

Duarum rerum aut literarum *a* & *b*, vel *a* præcedit & *b* ſequitur, vel præcedente *b* ſequitur *a*; unde duo ipſarum fiunt ordines *ab* & *ba*.

Tres porrò literæ *a*, *b*, *c*, ita collocari poſſunt, ut primus locus vel ipſi *a* vel *b* vel *c* concedatur: ſi *a* primum tenet locum, reliquæ

reliquæ duæ duobus, ut diximus, modis disponi queunt: si *b* in primum locum transferatur, reliquarum duarum duplex itidem poterit esse positio; quod & intelligendum, ubi tertia *c* primam sedem occupaverit. Unde trium literarum in universum ter duæ seu 6 existunt permutationes *abc*, *acb*: *bac*, *bca*: *cab*, *cba*.

Similiter si 4 extent literæ *a*, *b*, *c*, *d*, earum unaquæque primum obtinere locum potest, interea dum tres reliquæ, ut nunc ostensum, ter bis seu sexies ordinem variabunt: quare cùm earum, quæ primo loco poni possunt, sint quatuor, sequitur omnes quatuor quater ter bis, seu quater sexies, hoc est, vicies quater situm inter se permutare posse.

Ob eandem rationem accedente 5tâ literâ *e* institui possunt quinquies tot variationes, quot in casu præcedenti, hoc est, quinquies 24, seù 120. Et generaliter, datis quotcunque literis, numerus permutationum, quas subire possunt omnes, toties excedit numerum permutationum, quas recipiunt literæ unâ pauciores, quot sunt unitates in dato literarum numero. Unde sponte manat sequens

Regula

pro inveniendis omnibus permutationibus rerum quotcunque datarum.

OMnes numeri ab unitate se consequentes naturali ordine ad datum usque rerum numerum inclusivè ducantur in se invicem, productum manifestabit quæsitum.

Putà, si datus rerum numerus sit *n*, numerus permutationum erit 1. 2. 3. 4. 5. &c. usque ad *n*; vel etiam (quia unitas non multiplicat) 2. 3. 4. 5 . . . . . . *n*. Nota, punctula numeris interjecta hic & ubique in simili materiâ continuum numerorum in se ductum significant. Ex. gr. septem rerum permutationes sunt 2. 3. 4. 5. 6. 7 ∞ 5040. Ratio patet ex dictis, operatio ex adjunctâ Tabellâ:

Numerus Rerum,	Permutationum,
1	1
	2
2	2
	3
3	6
	4
4	24
	5
5	120
	6
6	720
	7
7	5040
	8
8	40320
	9
9	362880
	10
10	3628800
	3628800
11	39916800
	79833600
12	479001600

2. *Si rerum permutandarum nonnullæ ſunt eadem:*

Quòd ſi literæ una pluresve recurrant ſæpiùs, hoc eſt, ſi in dato rerum numero aliquæ res ſimiles ſint ſive eædem; ut, ſi datæ ſint *aaabcd*, ubi litera *a* ter repetitur, numerus permutationum multo minor evadit: ad quem inveniendum cogitandum eſt, quòd, ſi omnes eſſent diverſæ, putà, ſi loco *aaa* ſcriberetur *aαa*, poſſent hæ tres literæ etiam nullâ cæterarum loco motâ inter ſe ſexies tranſponi, per præced. Regul. unde totidem diverſæ naſcerentur permutationes; at nunc cùm ſunt eædem, ſex iſtæ permutationes literarum *aαa* nullam univerſarum diſpoſitioni variationem inducunt, ac proinde pro unâ eâdemque habendæ ſunt: quod cùm de quâcunque diſpoſitione literarum pariter ſit intelligendum, indicium præbet, numerum permutationum rerum datarum ſexies, h. e. toties minorem eſſe numero permutationum, quas ſubire poſſent ſi omnes eſſent diverſæ, quoties inter ſe permutari queunt res ſimiles: ſed ſi omnes 6 literæ diverſæ exiſterent, permutari poſſent juxta præced. 720. vicibus. Ergo nunc ubi tres ipſarum conveniunt, permutari duntaxat poterunt vicibus 120.

Iterum ſi datæ ſint 6 literæ *aaabbc*, ubi præter literam *a* quæ ter recurrit, etiam litera *b* bis repetitur; manifeſtum eſt, numerum permutationum adhuc bis minorem evadere, quàm in præcedenti caſu fuerat, adeoque ſolùm ad 60 ſe extendere: quandoquidem binæ quælibet permu-

permutationes, quæ ex solâ transpositione duplici literarum *bb*, si diversæ essent, nascerentur, nunc coïncidunt. Eodem pacto colligendum, si plures literæ repeterentur sæpiùs, pro singulis earum numerum permutationum minui toties, quoties seorsim inter se permutari possunt eædem literæ. Unde ratio habetur sequentis Regulæ:

Regula

pro inveniendis rerum permutationibus, cùm earum nonnullæ sunt eædem:

NUmerus permutationum, quas admitterent datæ res si omnes differentes essent, dividatur per numerum permutationum, quas subire potest res similis secundùm multitudinem suam, si una sit quæ sæpiùs repetatur: aut per productum ex numeris permutationum, quas seorsim recipere possunt singulæ res similes secundùm multitudinem suam, si plures sint quæ sæpiùs recurrant; & quotiens exhibebit quæsitum.

Usus Doctrinæ Permutationum insignis est in definiendo numero Anagrammatum alicujus vocis: Ex. gr. Transpositiones omnes possibiles literarum in voce *Roma* sunt $1.2.3.4 \infty 24$, ob 4 differentes literas, per 1 Reg. in voce *Leopoldus* $\frac{362880}{2.2 \infty 4} \infty 90720$: in voce *Studiosus* $\frac{362880}{2.6 \infty 12} \infty 30240$, ob 9 utrobique literas, interque illas ibi geminum *l* & geminum *o*, hîc geminum *u* & triplex *s*, per 2 Reg.

Huc pertinent versus nonnulli ob variationum multitudinem *Protei* dicti, quos inter celebrantur Lansii, Scaligeri, Bauhusii. Thomæ Lansio hoc distichon debemus:

Lex, Rex, Grex, Res, Spes, Jus, Thus, Sal, Sol, (bona) *Lux, Laus:*
Mars, Mors, Sors, Lis, Vis, Styx, Pus, Nox, Fex, (mala) *Crux, Fraus.*

 cujus

cujus singuli versus per Reg. pr. ob 11 monosyllaba (dissyllabis vocibus *bona* & *mala* 5^tæ^ semper regioni affixis) salvâ metri lege variari possunt 39916800 vicibus. Et quanquam aliàs contingat, ut pleræque variationes in metri leges arietent, nec non ut plerique Anagrammatismi sint non-significantes & barbari; levi tamen plerunque industriâ opus est ad secernendum utiles ab inutilibus, illorumque numerum seorsim ineundum, si aliquem in iis inquirendis ordinem observes. Quemadmodùm cernere est in hexametro à Bernh. Bauhusio Jesuitâ Lovaniensi in laudem Virginis Deiparæ constructo:

Tot Tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera cœlo;

quem dignum peculiari operâ duxerunt plures Viri celebres. Erycius Puteanus in libello, quem Thaumata Pietatis inscripsit, variationes ejus utiles integris 48 paginis enumerat, easque numero stellarum, quarum vulgò 1022 recensentur, accommodat, omissis scrupulosiùs illis, quæ dicere videntur, tot sidera cœlo esse, quot Mariæ dotes; nam Mariæ dotes esse multo plures. Eundem numerum 1022 ex Puteano repetit Gerh. Vossius cap. 7. de Scient. Mathemat. Prestetus Gallus in primâ editione Element. Mathemat. pag. 348. Proteo huic 2196 variationes attribuit, sed factâ revisione in alterâ edit. tom. pr. pag. 133. numerum earum dimidio fere auctum ad 3276 extendit. Industrii Actorum Lips. Collectores m. Jun. 1686, in recensione Tractatûs Wallisiani de Algebrâ, numerum in quæstione (quem Auctor ipse definire non fuit ausus) ad 2580 determinant. Et ipse postmodùm Wallisius in edit. latinâ operis sui Oxon. anno 1693. impressâ pagin. 494, eundem ad 3096 profert. Sed omnes adhuc à vero deficientes, ut delusam tot Virorum post adhibitas quoque secundas curas in re levi perspicaciam meritò mireris. Facto enim examine deprehendo, fætum hunc Bauhusianum exclusis etiam spondaïcis, admissis verò iis qui cæsurâ destituti sunt, salvâ metri lege omnino ter millies tercenties ac duodecies variabilem esse. At prolixiùs de his agere tanti non interest, nec institutum nostrum patitur.

Typus

Typus Variationum Versûs Bauhusiani:

Tot Tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera cælo.

Quintam Regionem Hexametri occupat vel

Sidera, quam vocem excipit aut vox
- *Dissyllaba una*, nempe vel
  - *Cælo*, ac tum vox *Tibi* inter sex reliquas occupat locum vel
    - *Secundum*, præcedente voce nunc
      - *Monosyllabâ*, eâque vel
        - *Tot*, cui casui respondent - - Variationes 24
        - *Sunt*, - - - - - - - 24
        - *Quot*, - - - - - - - 24
      - *Dissyllabâ Virgŏ*, - - - - - 24
    - *Tertium*, præeuntibus
      - *Unâ monosyllabâ & una dissyllabâ*, primas tenente vel
        - *Monosyllabâ*, *Tot*, quam excipit alterutra
          - *Dotes*: 6 } / *Virgō*: 6 } - - - - 12
          - *Sunt*, - - - - - - 12
          - *Quot*, - - - - - - 12
        - *Dissyllabâ*, *Dotes*, quam sequitur
          - *Tot*: 6 } / *Sunt*: 6 } / *Quot*: 6 } - - - - 18
          - *Virgō*, - - - - - - 18
      - *Duabus dissyllabis*, nempe, *Dotes Virgŏ*, - - - - 6

a b c d

174

a b c d 174

| | *Quartum*, præcedentibus
| | *Tribus monosyllabis*, - - - - - 12
| | *Duabus monosyllabis cum dissyllabâ Virgŏ*, - 12
| | *Unâ monosyllabâ & duabus dissyllabis*, - 36
| | *Quintum*, præmissis
| | *Tribus monosyllabis cum unâ dissyllabâ*, - - 48
| | *Duabus monosyllabis cum totidem dissyllabis*, quarum posterior *Virgŏ*, - - 18
| | *Sextum*, - - - - - - 120

| | | 420 . . 420

| *Dotes*, unde totidem variationes, quot in *Cœlo*, nempe - - 420
| *Virgo*, unde rursus totidem, quot in *Cœlo*, exceptis solùm illis 60 variationibus, ubi postrema syllaba in *Virgo* correpta est; quibus proin demtis ex 420 remanent - - - - - - 360

| *Monosyllaba duæ*, eæque
Quot sunt, vel *Sunt quot*; voce *Tibi* occupante locum vel
| | *Secundum*, primo relicto voci
| | *Monosyllaba*, *Tot*: - - - - - 12
| | *Dissyllaba*, *Virgo*: - - - - - 12
| | *Tertium*, præcedentibus
| | *Monosyllabâ cum Dissyllabâ*, - - - 24
| | *Duabus Dissyllabis*, quarum post. *Virgŏ*, - 8
| | *Quartum*, præeuntibus
| | *Monosyllabâ cum duabus Dissyllabis*, - - 36
| | *Tribus Dissyllabis*, quarum ultima *Virgŏ*, - 4
| | *Quintum*, - - - - - - 48

| | 144 - - 144

| *Tot sunt*, vel, *Sunt tot*, totidem - - - - 144
| *Tot quot*, aut, *Quot tot*, totidem - - - - 144
Tibi, &c.

1632

Tibi, quam vocem sequitur vox — 1632
Dissyllaba una, eaque vel
| *Cœlo*, voce *Sidera* occupante locum aut
| *Primum*, - - - - - - 120
| *Secundum*, - - - - - - 48
| *Tertium*, præmissis vel
| *Duabus Monosyllabis*, - - - - 36
| *Duabus Dissyllabis*, - - - - - 12
| *Quartum*, præeuntibus Duabus Monos. & unâ Diss. 72
| *Quintum*, præc. duabus Monos. totidemq; Dissyll. 72

360 . . 360

Dotes, totidem quot in *Cœlo* - - - - 360
Virgo, totidem - - - - - - 360
Monosyllabæ duæ, eæque
| *Quot sunt*, vel, *Sunt quot*: voce *Sidera* tenente locum
| *Primum*: - - - - - - - 48
| *Secundum*, post Dissyllabam vocem, - - 36
| *Tertium*, post duas Dissyllabas, - - 24
| *Quartum*, post tres Dissyllabas, - - 12

120 - - 120

| *Tot sunt*, vel, *Sunt tot*, totidem - - - - 120
| *Tot quot*, vel, *Quot tot*, totidem - - - - 120
Monosyllabâ unâ, (quo casu ante *Tibi* semper habetur *Virgô*,) nempe vel
Sunt, voce *Sidera* locum possidente aut
| *Primum*: - - - - - - - 24
Secundum: - - - - - - 12
| *Tertium*, præced. *duabus Monosyllabis*, - - 4
- - *duabus Dissyllabis*, - - 4
| *Quartum*, - - - - - - - 12
Quintum, - - - - - - - 24

80 . . 80

Tot, totidem quot in *Sunt*; - - - - - 80
Quot, totidem - - - - - - 80

Summa omnium Variationum utilium 3312

Cap. II.

De Combinationibus, iisque primò considеratis simpliciter.

Combinationes rerum sunt Conjunctiones, juxta quas ex datâ rerum multitudine nonnullæ eximuntur, interque se conjunguntur nullo ordinis situsve ipsarum respectu habito.

Idcircò cùm quæritur, quoties ex dato rerum numero vel binæ, vel ternæ, vel quaternæ &c. accipi possint, sic ut nunquam omnes eædem res sumantur sæpiùs quàm semel, dicentur quæri omnes Combinationes diversæ rerum datarum.

Numerus, secundùm quem res datæ conjunguntur, dicitur *Exponens* Combinationis; ita si res binæ sumuntur, Exponens erit 2; si ternæ, 3; si quaternæ, 4. Res verò secundùm hos exponentes junctæ dicuntur *Binarii*, *Ternarii*, *Quaternarii* &c. vel *Biniones*, *Terniones*, *Quaterniones* &c. & consonanter etiam *Uniones* vel *Unitates* quando res sumuntur singulæ, & *Nulliones* cùm nulla planè sumitur.

Conjunctiones ipsas nonnulli vocant *Combinationes*, *Con3nationes*, *Con4nationes* &c. quas omnes vulgò unâ voce *Combinationum* complecti solent, tametsi hæc vox strictiori significatu propriè non nisi illas conjunctiones indigitare videatur, quibus res binæ invicem junguntur. Quamobrem alii generaliori voce *Complicationum* vel *Complexionum* uti malunt: alii magis appositè *Electiones* vocant, ut & illæ subintelligi possint rerum acceptiones, quibus res singulæ seorsim sumuntur, aut quibus etiam nulla planè sumitur.

Res autem inter se combinandæ vel omnes possunt esse diversæ, vel aliquot ipsarum eædem; eæque vel ita combinari debent, ut in nullâ combinatione res eadem sæpiùs contineatur, quàm ipsa reperitur in toto rerum numero: vel sic, ut in eâdem combinatione res eadem etiam sæpiùs recurrere, h. e. ut secum ipsâ quoque combinari possit. Iterumque quæri potest numerus combinationum

tionum vel ſecundùm omnes exponentes conjunctim, vel ſecundùm ſingulos ſeorſim. Atque inſuper circa unumquemque horum combinandi modorum plures formari poſſunt quæſtiones & problemata, è quibus illa tantùm delibabimus, quæ in ſequentibus alicui uſui fore judicamus.

1. *Si res omnes combinandæ ſunt diverſæ, inque nullâ combinatione eadem res bis occurrere debet, invenire omnes Combinationes ſimpliciter ſive ſecundùm omnes exponentes conjunctim:*

SUnto combinandæ modis omnibus literæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* &c. Fiant tot ſeries quot literæ, hoc modo: In primâ ſerie ponatur ſola litera *a*.

In ſecundâ ponatur *b*, nunc ſeorſim, nunc junctim cum *a*, ut habeatur *ab* vel *ba*. Eadem enim conjunctio eſt, quæ *b* cum *a*, & *a* cum *b* jungit, cùm ordo non attendi ſupponatur.

In tertiâ collocetur *c*, eaque primò ſola, dein juncta, partim cum *a* & *b*, ut fiant biniones *ac*, *bc*; partim cum ipſo binione *ab*, ut fiat ternio *abc*.

a.

b. *ab*.

c. *ac*. *bc*. *abc*.

d. *ad*. *bd*. *cd*. *abd*. *acd*. *bcd*. *abcd*.

e. *ae*. *be*. *ce*. *de*. *abe*. *ace*. *bce*. *ade*. *bde*. *cde*. *abce*. *abde*. *acde*. *bcde*. *abcde*.

In quartâ ponatur *d*, primò ſola, deinde juncta cum ſingulis præcedentium literarum *a*, *b*, *c*, ſingulisque earum tum binariis *ab*, *ac*, *bc*, tum ternario *abc*; ut fiant novi biniones *ad*, *bd*, *cd*, terniones *abd*, *acd*, *bcd*, & quaternio *abcd*.

Similiter quintæ ſeriei agmen ducat litera *e*, quam primò ingrediatur ſola, dein juncta cum omnibus præcedentium ſerierum electionibus. Eademque methodo procedendum, ſi plures eſſent

datæ literæ. Quâ ratione ſatis manifeſtum eſt, datas literas in iſtis ſeriebus omnifariàm inter ſe junctas eſſe, nullamque earum fieri poſſe electionem, quæ non in unâ harum ſerierum reperiatur, ſed & nullam eſſe quæ alicubi bis occurrat; adeoque omnes unà ſeries ſuppeditaturas omnes electiones poſſibiles, quæ circa datas literas inſtitui queunt.

Harum igitur numerus initur facilè, ſi attendatur quòd in quâlibet ſemper ſerie una ampliùs inveniri debeat electio, quàm in antecedentibus omnibus ſeriebus ſimul; quoniam litera, quæ illius ſeriei caput eſt, ibidem ſemel ponitur ſola, & præterea unà aſſumit ſecum omnes electiones præcedentium ſerierum. Hinc enim ſequitur, quia in primâ ſerie eſt electio unica, fore in ſecundâ electiones duas, in tertiâ 4, in quartâ 8, & ſic deinceps in progreſſione geometricâ duplâ: quandoquidem progreſſionis duplæ ab unitate hanc quoque naturam eſſe conſtat, ut ſumma terminorum quotlibet unitate aucta ſequentem terminum exhibeat. Quocirca ſumma electionum in ſeriebus omnibus æqualis eſt ſummæ terminorum totidem progreſſionis duplæ ab unitate, hoc eſt, per modò memoratam proprietatem, ipſi termino ſubſequenti ejusdem progreſſionis unitate multato; qui quidem terminus ſubſequens idem eſt cum producto binarii toties poſiti & in ſe ducti, quot ipſum in progreſſione termini præcedunt, hoc eſt, quot ſunt ſeries, quarum electiones quæruntur. Unde talis exurgit

Regula

pro inveniendis omnibus electionibus rerum datarum ſecundùm omnes exponentes:

A producto binarii toties poſiti & multiplicati in ſe, quot ſunt datæ res, auferatur unitas, reliquum indicabit quæſitum.

Hoc eſt, poſito rerum datarum numero n, numerus omnium electionum ſimpliciter, putà, omnium unionum, binionum, ternionum &c. erit $2^n - 1$. Hinc ſi nullionem ſeu electionem, quâ ex rebus datis nulla ſumitur, quæque in quâvis rerum multitudine

una

una ſemper eſt & unica, ſimul comprehendas, fiet numerus ille 2^n: ſin cum nullione ipſos quoque uniones reſeces, quorum numerus ipſi rerum numero perpetuò æquatur, erit numerus binionum, ternionum, cæterarumque complexionum $2^n - n - 1$. Ex. gr. Septem Planetarum conjunctiones vel complicationes omnes diverſæ ſunt $2^7 - 1 \infty 2.2.2.2.2.2.2 - 1 \infty 128 - 1 \infty 127$; unde ſi demas electiones 7, quibus ſinguli Planetæ ſeorſim accipiuntur, quæque propriè non conjunctiones ſed disjunctiones Planetarum ſunt, relinquetur numerus omnium conjunctionum ſtrictè dictarum, quibus Planetæ vel bini vel terni &c. vel denique ſepteni junguntur, $2^7 - 7 - 1 \infty 120$. Sic etiam duodecim, uti vocant, Regiſtra ſeu fiſtularum ordines in organo pneumatico, quibus ſonus mox ſibilans mox tremebundus efficitur, aut aliter modificatur, variari poſſunt $2^{12} - 1 \infty 4095$ vicibus.

Nota: Si quis examinet ſeries combinationum ſupra in typo expoſitas, obſervabit, in quâlibet ſerie (ſolâ primâ exceptâ, quæ unicum unionem *a* complectitur) numerum electionum ſecundùm exponentes pares æquari numero electionum ſecundùm impares; ſaltem cùm id in aliquot ab initio ſeriebus verum deprehenderit, idemque quoque in ſerie proximè ſequente locum habere concludet: nam litera, quæ illius ſeriei caput eſt, juncta præcedentium ſerierum electionibus iis, quæ impares exponentes habent, parium; & iis viciſſim quæ pares habent juncta, imparium exponentium complexiones efficit; adſciſcens verò primæ ſeriei unionem *a*, paris, & ipſa per ſe ſola accepta imparis exponentis electionem conſtituit; unde & in hâc ſerie numerum harum numero illarum æquari conſtat. In omnibus igitur ſeriebus ſimul ſumtis numerus electionum ſecundùm impares exponentes numerum electionum ſecundùm pares unitate ſuperabit; aut ſi his inſuper nullionem accenſeas, æquabit. Quocirca cùm numerus omnium electionum ſimpliciter incluſo nullione oſtenſus ſit 2^n, erit ejus ſemiſſis ſive poteſtas binarii proximè minor 2^{n-1} numerus electionum ſecundùm ſolos impares; &, demto rurſum nullione, $2^{n-1} - 1$ numerus electionum ſecundùm ſolos pares exponentes, Idem quoque demonſtrabitur infrà in Coroll. 6. Cap. 4.

CAP. III.

De Combinationibus secundùm singulos exponentes seorsim; ubi de Numeris Figuratis, eorumque proprietatibus agitur.

EX typo Combinationum præcedentis capitis manifestum fit, literam quæ cujuslibet seriei caput est, adjunctam unionibus seriérum præcedentium efficere suæ seriei biniones, adjunctam binionibus efficere terniones, ternionibus 4^{ones}, & sic porrò: adeoque numerum binionum in quàvis serie æquari summæ unionum in omnibus seriebus antecedentibus, numerum ternionum summæ binionum, numerum quaternionum summæ ternionum & generaliter numerum combinationum secundùm datum quemcunque exponentem in serie quâcunque æquari summæ combinationum omnium præcedentium serierum secundùm exponentem unitate minorem dato. Sequitur hinc, quòd

Uniones, quia in singulis seriebus reperiuntur singuli, omnes inter se constituunt seriem 1.1.1.1.1. &c. seu, seriem unitatum.

Biniones in primâ serie nulli sunt, in secundâ 1, in tertiâ $1+1 \infty 2$, in $4^{tâ}$ $1+1+1 \infty 3$, in $5^{tâ}$ $1+1+1+1 \infty 4$ &c. proinde omnes biniones inter se constituunt seriem 0.1.2.3.4.5. &c. hoc est, seriem numerorum Arithmeticè progressionalium sive Lateralium.

Terniones in primâ & secundâ serie nulli sunt, in $3^{tiâ}$ 1, in $4^{tâ}$ $1+2 \infty 3$, in $5^{tâ}$ $1+2+3 \infty 6$, in $6^{tâ}$ $1+2+3+4 \infty 10$. &c. omnes itaque ordine accepti seriem conficiunt 0.0.1.3.6.10.15. &c. hoc est, seriem numerorum, ut vocant, Trigonalium.

Quaterniones in tribus primis seriebus nulli sunt, in $4^{tâ}$ 1, in $5^{tâ}$ $1+3 \infty 4$, in $6^{tâ}$ $1+3+6 \infty 10$, in $7^{mâ}$ $1+3+6+10 \infty 20$. &c. qui omnes ordine assumti seriem efficiunt 0.0.0.1.4.10.20. &c. seriem videl. Pyramidalium.

Pari

Pari ratione Quiniones omnes ſeriem conſtituunt Trianguli-pyramidalium o.o.o.o.1.5.15.35. &c. Seniones ſeriem Pyramidi-pyramidalium o.o.o.o.o.1.6.21. &c. aliæque combinationes ſecundùm altiores exponentes efficiunt alias atque alias ſeries Figuratorum altioris generis in infinitum.

Et ſic occaſione Doctrinæ Combinationum in ſpeculationem inſperatam Numerorum Figuratorum incidimus, quâ appellatione vulgò inſigniuntur numeri, qui ex continuâ Arithmeticè proportionalium indeque ortorum numerorum additione vel collectione generantur.

Ut verò hæ figuratorum numerorum ſeries ſub unum aſpectum caderent, eoque faciliùs comprehenderentur quæ de illis dicenda ſuperſunt, ſequentem appoſui Tabellam, quam quis nullo negotio quouſ-

Tabula

Combinationum, ſeu Numerorum Figuratorum.

Exponentes Combinationum.

Numeri Rerum Combinandarum.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5.	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
6.	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
7.	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0
8.	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0
9.	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0
10.	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0
11.	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0
12.	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

quousque voluerit tum deorsum tum dextrorsum continuabit. Numeri barbari in sinistro Tabulæ margine adscripti numerant columnas transversas, & simul rerum combinandarum multitudinem: numeri verò Romani in supremo margine conspicui numerant columnas verticales & unà exponentes combinationum innuunt. Columnarum verticalium prima est series Monadum seu unitatum, secunda series numerorum naturalium seu lateralium ab unâ cyphrâ incipiens, tertia series Trigonalium incipiens à cyphris duabus, 4^{ta} Pyramidalium incipiens à tribus, 5^{ta} Trianguli-pyramidalium incipiens à 4 cyphris; & sic deinceps.

Habet hæc Tabula proprietates planè eximias & admirandas; præterquàm enim quòd Combinationum mysterium in illâ latere jam ostendimus, notum est interioris Geometriæ peritis, præcipua etiam totius reliquæ Matheseos arcana inibi delitescere. Nos proprietatum aliquas hîc delibabimus, & quidem delibabimus tantùm, nullius nisi primariæ illius, quæ proposito nostro inservit demonstrationem accuratiorem allaturi, cùm cæteræ vel ex hâc ostendi possint, vel ex ipsâ Tabellæ constructione & numerorum figuratorum genesi satis pateſcant.

Mirificæ proprietates Tabulæ Combinationum:

1. Columnarum verticalium secunda incipit ab unâ cyphrâ, tertia à cyphris duabus, 4^{ta} à 3^{bus}; & generaliter columna c à cyphris $c-1$.

2. Columnarum verticalium termini primi significativi à sinistrâ dextrorsum obliquè descendendo ordine sumti reddunt ipsos terminos primæ columnæ verticalis, secundi secundæ, tertii tertiæ, & ita deinceps: putà, primi constituunt seriem monadum, secundi lateralium, tertii trigonalium &c.

3. Secundus ab unitate terminus columnæ verticalis cujuslibet æquatur ipsius columnæ numero.

4. Terminus quivis Tabellæ æquatur summæ omnium superiorum præcedentis columnæ verticalis.

5. Quilibet terminus æquatur duobus aliis immediatè supra

se po-

ſe poſitis, quorum unus eſt in eâdem verticali columnâ, alter in præcedente.

6. Columnæ cujuſvis tranſverſæ termini ab unitate aliquouſque creſcunt, deinde per eoſdem gradus rurſum decreſcunt. Idem intellige de ſummis columnarum verticalium æque-altarum, ceu terminis ſequentis columnæ tranſverſæ, per 4 propr.

7. Columnarum verticalium æque-altarum baſes, ſive termini columnæ tranſverſæ cujuslibet, primus quidem & ultimus ſignificativus perpetuò inter ſe æquantur, ut & ſecundus & penultimus, tertius & antepenultimus, atque ita porrò, ſi columna pluribus terminis ſignificativis conſtet.

8. Quin & ſumtis ab initio columnis verticalibus quotcunq; cum totidem tranſverſis, collectisque in unam ſummam qui in eâdem verticali ſibi reſpondent terminis, erit ſumma prima æqualis penultimæ, ſecunda antepenultimæ, tertia proantepenultimæ, & ſic deinceps. Exhibent enim hæ ſummæ ipſos columnæ transverſæ ſequentis terminos primo excepto. Conf. propr. 4 & 7. Ex. gr. Quinque primæ columnæ tum verticales tum transverſæ ſunt:

1.	0.	0.	0.	0.
1.	1.	0.	0.	0.
1.	2.	1.	0.	0.
1.	3.	3.	1.	0.
1.	4.	6.	4.	1.
5.	10.	10.	5.	1. Termini ſextæ columnæ transverſæ primo excepto.

9. Columnæ transverſæ ordine exhibent coëfficientes omnium poteſtatum à radice aliquâ binomiâ genitarum; nempe ſecunda coëfficientes radicis 1.1. tertia quadrati 1.2.1. quarta cubi 1.3.3.1. quinta biquadrati 1.4.6.4.1. & ſic porrò.

10. Summæ ſerierum transverſarum progrediuntur in continuâ ratione duplâ: ſummarum verò ſummæ ab initio collectæ terminos conſtituunt progreſſionis duplæ unitate multatos; putà

1	∞ 1	1	∞ 1	∞ 2−1
1+1	∞ 2	1+2	∞ 3	∞ 4−1
1+2+1	∞ 4	1+2+4	∞ 7	∞ 8−1
1+3+3+1	∞ 8	1+2+4+8	∞ 15	∞ 16−1
1+4+6+4+1	∞ 16	1+2+4+8+16	∞ 31	∞ 32−1

Fluit ex iis, quæ in præced. cap. de Combinationibus simpliciter spectatis dicta sunt.

11. Termini seriei verticalis cujuslibet ordine divisi per terminos collaterales seriei præcedentis (initio vel ab unitate vel à suis respectivè cyphris facto) exhibent quotos Arithmeticè proportionales, quorum communis differentia est fractio, cujus numerator est unitas, & denominator ipse numerus sive secundus ab unitate terminus seriei dividentis. Ex. gr.

Divis.)	*divid.*	*(quot.*	*divis.)*	*divid.*	*(quot.*	*divis.)*	*divid.*	*(quot.*	*divis.)*	*divid.*	*(quot.*
1)	1	(2:2	1)	0	(0:2	1)	1	(3:3	1)	0	(0:3
2)	3	(3:2	2)	1	(1:2	3)	4	(4:3	3)	1	(1:3
3)	6	(4:2	3)	3	(2:2	6)	10	(5:3	6)	4	(2:3
4)	10	(5:2	4)	6	(3:2	10)	20	(6:3	10)	10	(3:3
5)	15	(6:2	5)	10	(4:2	15)	35	(7:3	15)	20	(4:3

Non difficulter hæc proprietas, si opus foret, deduci posset ex sequente.

12. Summa terminorum quotcunque seriei verticalis cujuslibet à suis respectivè cyphris incipientis ad summam terminorum totidem ultimo æqualium eam habet rationem, quam habet unitas ad illius seriei numerum; hoc est, Aggregatum numerorum quotcunq; lateralium ab unâ cyphrâ seriem auspicantium est ad aggregatum numerorum totidem maximo eorum seu ultimo æqualium, ut 1 ad 2; trigonalium à cyphris duabus, ut 1 ad 3, pyramidalium à tribus, ut 1 ad 4. &c. Idem quoque valet de ratione, quam habet summa terminorum seriei cujuslibet ab unitate incipientis ad summam totidem maximum sequenti termino æqualium. Ex. gr.

0	3
1	3
2	3
3	3
6.12::1.2	

1	5
2	5
3	5
4	5
10.20::1.2	

0	6
0	6
1	6
3	6
6	6
10.30::1.3	

1	15
3	15
6	15
10	15
20.60::1.3	

0	10
0	10
0	10
1	10
4	10
10	10
15.60::1.4	

1	56
4	56
10	56
20	56
35	56
70.280::1.4	

&c.

Cùm inter affectiones numerorum figuratorum hæc præcipua sit, eidemque scopo nostro primariò inserviat, visum hic est exponere methodum, quâ talem proprietatis ἀπόδειξιν exhibeo, quæ simul & scientifica sit, & propositum universaliter concludat. Quem in finem sequentia præstruo lemmata:

1. *Lemma*: Summa terminorum quotlibet primæ seriei ad summam totidem terminorum ultimo æqualium rationem habet æqualitatis, sive ut 1 ad 1.

Dem. Cùm enim series meris constet unitatibus, erit summa terminorum quotlibet, summa tot unitatum, h. e. tot terminorum ultimo æqualium, quot sunt termini.

2. *Lemma*: In qualibet serie à suis respectivè cyphris incipiente, si quota est ipsa inter series, tot ab initio sumantur termini, erit summa terminorum omnium ad summam totidem ultimo æqualium, ut 1 ad seriei numerum.

Dem. Numerus enim cyphrarum quamcunque seriem auspicantium unitate minor est seriei numero, per propr. 1. his igitur si accedat sequens terminus, numerus terminorum seriei numero æquabitur: sed terminus, qui proximè cyphras sequitur, est unitas, per

M 2 propr.

propr. 2. unde terminorum aggregatum æquatur unitati, & aggregatum totidem ultimo æqualium ipsi seriei numero; quare constat.

3. *Lemma*: In quâcunque numerorum serie, si summa terminorum ab initio sumtorum ad summam totidem ultimo æqualium perpetuò eandem habeat rationem, quotcunque accipiantur termini, putà ut 1 ad R, ita ut summa terminorum æquetur summæ totidem ultimo æqualium divisæ per R; erit numerus terminorum assumtorum ablato R ad eundem numerum unitate multatum, ut sumtorum penultimus ad ultimum.

Dem. Sumti sint ab initio termini quotlibet A. B. C. D. quorum numerus sit N, penultimus C, & ultimus D. Est utique $A + B + C$ ∞ $A + B + C + D - D$, hoc est, per hypoth. $\frac{C \text{ in } N-1}{R} \infty \frac{D \text{ in } N}{R} - D$ & æque-multiplicando, C in $N - 1 \infty D$ in $N - D$ in $R \infty D$ in $N - R$, adeoq; $N - R . N - 1 :: C . D$. Quod erat demonstrandum.

4. *Lemma*: In Tabulâ numerorum figuratorum si duæ sint columnæ verticales contiguæ, in quarum priore quotlibet ab initio termini ad totidem ultimo eorum æquales habeant constantem rationem ut 1 ad r; habeant verò in posteriore termini aliquot ab initio sumti ad totidem sumtorum ultimo æquales rationem ut 1 ad $r + 1$: habebit quoque addito sequenti termino, summa omnium terminorum unà cum adjecto ad tot terminos adjecto æquales, quot sunt cum adjecto termini, rationem ut 1 ad $r + 1$.

Dem. Sumti sint in posteriore columnâ termini E. F. G. H, quos proximè sequatur I; atque sumantur in columnâ immediatè præcedente termini totidem A. B. C. D; sumtorum verò utrinque numerus sit n. Erit r H ∞ (ex num. figurat. genesi per propr. 4) r in $A + B + C \infty$ (per hyp.) $n - 1$ in $C \infty$ (per lemma 3) $n - r$ in D; quare $n - r . H :: r . D ::$ (hypoth.) $n . A + B + C + D ::$ (ex num. fig. genesi per propr. 4) $n . I$. Unde $n - r$ in $I \infty n$ H ∞ (hypoth.) $r + 1$ in $E + F + G + H$; adeoque $n - r . r + 1 :: E + F + G + H . I$, & componendo $n + 1 . r + 1 :: E + F + G + H + I . I$, hoc est, $E + F + G + H + I . n + 1$ in $I :: 1 . r + 1$. Q. E. D.

Cum olim horum Fratri copiam fecissem, animadvertit ille posse demon-

demonstrationem eleganter abbreviari, postremis tribus lemmatibus in unum conflatis, hoc modo:

Lemma: In Tab. num. fig. si summa terminorum ab initio seriei verticalis cujusvis ad summam totidem maximo æqualium ubique rationem habeat ut 1 ad r, habebit summa terminorum seriei proximè sequentis ad summam totidem maximo æqualium rationem ut 1 ad $r+1$.

Dem: Sint series sequentes $a.b.c.d.$ &c. & $o.g.h.i.$ &c. numerus terminorum prioris sit n, posterioris $n+1$.

$$n\left\{\begin{array}{ccc} a & - - & o \\ b & - - & g \\ c & - - & h \\ d & - - & i \\ e & - - & l \\ f & - - & p \\ & & q \end{array}\right\}n+1.$$

Est primò $q+p+l+i+h+g+o \infty$ (ex hyp. & genesi num. fig. per propr. 4) $\frac{nf}{r}+\frac{\overline{n-1}.e}{r}+\frac{\overline{n-2}.d}{r}+\frac{\overline{n-3}.c}{r}+\frac{\overline{n-4}.b}{r}+\frac{\overline{n-5}.a}{r} \infty \frac{n.\overline{f+e+d+c+b+a}-e-2d-3c-4b-5a}{r} \infty$ (ex gen. num. fig.) $\frac{nq-p-l-i-h-g}{r}$.

Ergò $rq+r.\overline{p+l+i+h+g} \infty nq-p-l-i-h-g$; factâque translatione convenienti $\overline{r+1}.\overline{p+l+i+h+g} \infty nq-rq$: dividatur utrinq; per $r+1$, erit $p+l+i+h+g \infty \frac{nq-rq}{r+1}$; additoque q habebitur $q+p+l+i+h+g \infty \frac{nq-rq}{r+1}+q \infty \frac{\overline{n+1}.q}{r+1}$, hoc est, $g+h+i+l+p+q.\ \overline{n+1}.q :: 1.\ r+1$. Q.E.D. Sequitur nunc *Propositio principalis*: In Tab. num. fig. summa terminorum quotlibet à suis respectivè cyphris incipientium ad summam totidem ultimo æqualium; item summa terminorum quotvis incipientium ab unitate ad summam totidem ultimum sequenti æqualium, in serie primâ seu monadum est ut 1 ad 1, in serie secundâ seu lateralium ut 1 ad 2; in tertiâ seu trigonalium ut 1 ad 3, in 4tâ seu pyramidalium ut 1 ad 4, & generaliter in serie quâcunque ut 1 ad illius seriei numerum.

Dem. I. De primâ serie constat ex primo lemmate: de secundâ, tertiâ, 4tâ &c. è reliquis. Nam quia summa terminorum quotlibet ad summam totidem ultimo æqualium in primâ serie est ut 1 ad 1, erit vi horum lemmatum in 2dâ ut 1 ad $1+1 \infty 2$; & quia in 2dâ

2dâ est ut 1 ad 2, e rit in 3tiâ ut 1 ad $2+1 \infty 3$; & propterea etiam in 4tâ ut 1 ad $3+1 \infty 4$; in 5tâ ut 1 ad $4+1 \infty 5$; & generaliter in serie c ut 1 ad c.

II. Quia rationem 1 ad $r+1$ memoratam in ultimo lemmate hic interpretamur per rationem 1 ad c, erit $r \infty c-1 \infty$ (per propr. 1.) numero cyphrarum, à quibus columna c incipit. Quare cùm in dicto lemmate repertum sit $g+h+i+l+p \infty \frac{n-r.q}{r+1} \infty \frac{n-r.q}{c}$, sequitur quòd $g+h+i+l+p$ (summa terminorum quorum numerus est n) se habet ad q in $n-r$ (numerum terminorum minùs numero cyphrarum) sicut 1 ad c; hoc est, summa terminorum quotlibet ab unitate incipientium ad totidem terminos sequenti ultimum æquales, ut 1 ad c.

Consectarium: Ex hâc ostensâ proprietate facilè nunc est, invenire tum terminum optatum, tum summam terminorum seriei cujuslibet: Sumti intelligantur termini æque-multi ex pluribus continuè columnis, & sit numerus sumtorum ab initio cujusque columnæ n, adeoque numerus terminorum ab unitate (exclusis cyphris initialibus) in secundâ columnâ $n-1$, in tertiâ $n-2$, in 4tâ $n-3$. &c. per 1 propr. quo posito quæsitum ita colligo: Summa terminorum n primæ columnæ, nempe, n unitates seu $\frac{n}{1}$ æquatur termino $n+1$, hoc est, termino sequenti ultimum secundæ columnæ, per 4 propr. ex tabulæ genesi. Quare termini hujus in $n-1$ (numerum terminorum ab unitete 2dæ columnæ) ducti subduplum, seu $\frac{n.n-1}{1.2}$, per 12 propr. æquale est aggregato terminorum 2dæ columnæ, & simul per 4 propr. ipsi termino sequenti ultimum tertiæ col. Unde similiter hujus termini in $n-2$ (num. termin. ab unitate 3tiæ col.) ducti subtriplum, nempe $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$, æquatur per 12 propt. aggregato terminorum 3tiæ columnæ, insimulque per 4 propr. ipsi termino sequenti ultimum 4tæ. Quocirca & hujus termini in $n-3$ (num. term. ab unit. 4tæ col.) ducti subquadruplum, putà $\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}$, exhibet summam terminorum 4tæ columnæ, unàque terminum qui sequitur ultimum 5tæ; & rursus istius termini in $n-4$ ducti subquintu-

plum

plum $\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}$ producit summam terminorum col. $5^{tæ}$, & simul terminum qui excipit ultimum $6^{tæ}$; atque ita consequenter. E quibus igitur infertur, quòd summa terminorum n primæ columnæ sit $\frac{n}{1}$, $2^{dæ}$ $\frac{n.n-1}{1.2}$, $3^{tiæ}$ $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$, $4^{tæ}$ $\frac{n.n-1.n.2.n-3}{1.2.3.4}$, $5^{tæ}$ $\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}$, & generaliter columnæ c, $\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4 \ldots n-c+1}{1.2.3.4.5 \ldots c}$. Et quia quælibet harum quantitatum etiam exprimit terminum $n+1$ sequentis columnæ, sequitur quòd ipse illius terminus optatus seu ultimus n habeatur mutato solummodò ubique n in $n-1$; adeoque quòd terminus optatus, secundæ columnæ sit $\frac{n-1}{1}$, tertiæ $\frac{n-1.n-2}{1.2}$, $4^{tæ}$ $\frac{n-1.n-2.n-3}{1.2.3}$, $5^{tæ}$ $\frac{n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4}$, & generaliter columnæ c, $\frac{n-1.n-2.n-3\ n-4 \ldots n-c+1}{1.2.3.4 \ldots c-1}$.

Scholium: Multi, ut hoc in transitu notemus, numerorum figuratorum contemplationibus vacârunt (quos inter Faulhaberus & Remmelini Ulmenses, Wallisius, Mercator in Logarithmotechniâ, Prestetus, aliique) sed qui proprietatis hujus demonstrationem universalem dederit & scientificam, novi neminem. Wallisius in Arithm. Infinitorum fundamentum suæ methodi jacturus, rationes quas habent series Quadratorum, Cuborum aliarumque potestatum numerorum naturalium ad seriem totidem maximo æqualium, inductione investigat; indeque prop. 176 ad contemplationem Trigonalium, Pyramidalium, reliquorumque figuratorum transit: sed satius fuisset forteque naturæ rei convenientius, si vice versâ tractationem numerorum figuratorum, eamque universali & accuratâ demonstratione munitam præmisisset, ac tum demum ad potestatum summas investigandas perrexisset. Præterquam enim quod modus demonstrandi per inductionem parùm scientificus est, insuperque pro qualibet serie peculiarem operam deposcit; illa utique omnium judicio præcedere debent, quæ cæteris naturâ sunt priora & simpliciora, quales videntur esse numeri figurati præ potestatibus, tum quod

quod illi additione, hæ multiplicatione generantur, tum & præcipuè quod ſeries figuratorum à ſuis reſpectivè cyphris incipientes ad ſeries æqualium rationem habent exactè ſubmultiplicem, qualem non habere poſſunt ſeries poteſtatum (ſaltem in terminis numero finitis) absque aliquo exceſſu vel defectu quicunque cyphrarum numerus ipſis præfigatur. De cætero namque ex cognitis figuratorum ſummis nihilo difficilius inveſtigari poterunt poteſtatum ſummæ, atque ex his priores collegit auctor; quod quomodo fiat, paucis oſtendam.

Proponatur ſeries numerorum naturalium ab unitate 1.2.3.4.5. &c. uſque ad n, & quærantur omnium ipſorum, item omnium quadratorum, cuborum &c. ex ipſis ſummæ: Quoniam in tab. combinat. terminus ſecundæ columnæ indefinitè eſt $n-1$, & ſumma omnium terminorum, hoc eſt, ſumma omnium $n-1$ ſeu $\int\overline{n-1}$ per conſect. præcedens inventa $\frac{n.\overline{n-1}}{1.2} \infty \frac{nn-n}{2}$, erit $\int\overline{n-1}$ ſive $\int n - \int 1 \infty \frac{nn-n}{2}$, & $\int n \infty \frac{nn-n}{2} + \int 1$; ſed $\int 1$ (ſumma omnium unitatum) eſt n; quare ſumma omnium n ſeu $\int n \infty \frac{nn-n}{2} + n \infty \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$.

Porrò cum terminus tertiæ columnæ indefinitè acceptus per idem conſect. ſit $\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2} \infty \frac{nn-3n+2}{2}$, & ſumma omnium terminorum (hoc eſt, omnium $\frac{nn-3n+2}{2}$) $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3} \infty \frac{n^3-3nn+2n}{6}$; erit $\int\overline{\frac{nn-3n+2}{2}}$ ſive $\int\frac{1}{2}nn - \int\frac{3}{2}n + \int 1 \infty \frac{n^3-3nn+2n}{6}$, & $\int\frac{1}{2}nn \infty \frac{n^3-3nn+2n}{6} + \int\frac{3}{2}n - \int 1$; ſed $\int\frac{3}{2}n \infty \frac{3}{2}\int n \infty$ (per modo oſtenſa) $\frac{3}{4}nn + \frac{3}{4}n$, & $\int 1 \infty n$: unde his ſubſtitutis fit $\int\frac{x}{2}nn \infty \frac{n^3-3nn+2n}{6} + \frac{3nn+3n}{4} - n \infty \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{4}nn + \frac{1}{12}n$, ejusq; duplum $\int nn$ (ſumma quadratorum ex omnibus n) $\infty \frac{1}{3}n^3 + \frac{x}{2}nn + \frac{1}{6}n$.

Rurſus quia terminus n 4^tæ^ columnæ eſt $\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3} \infty \frac{n^3-6nn+11n-6}{6}$, & ſumma omnium terminorum $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4}$

∞ $n4$

$\infty \frac{n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n}{24}$, erit utique $\int \frac{n^3 - 6nn + 11n - 6}{6}$, hoc est, $\int \frac{1}{6}n^3 - \int nn + \int \frac{11}{6}n - \int 1 \infty \frac{n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n}{24}$, indeque $\int \frac{1}{6}n^3 \infty \frac{n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n}{24} + \int nn - \int \frac{11}{6}n + \int 1$. Et quoniam per modo inventa $\int nn \infty \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$; nec non $\int \frac{11}{6}n$ sive $\frac{11}{6}\int n \infty \frac{11}{12}nn + \frac{11}{12}n$, & $\int 1 \infty n$; hinc factâ horum substitutione emerget $\int \frac{1}{6}n^3 \infty \frac{n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n}{24} + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n - \frac{11}{12}nn - \frac{11}{12}n + n \infty \frac{1}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^3 + \frac{1}{24}nn$, ejusque proin sextuplum $\int n^3$ (summa cuborum) $\infty \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn$. Atque sic porrò ad altiores gradatim potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum licet:

Summa Potestatum.

$\int n \infty \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n.$

$\int nn \infty \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n.$

$\int n^3 \infty \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn.$

$\int n^4 \infty \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 \ast - \frac{1}{30}n.$

$\int n^5 \infty \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 \ast - \frac{1}{12}nn.$

$\int n^6 \infty \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 \ast - \frac{1}{6}n^3 \ast + \frac{1}{42}n.$

$\int n^7 \infty \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 \ast - \frac{7}{24}n^4 \ast + \frac{1}{12}nn.$

$\int n^8 \infty \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 \ast - \frac{7}{15}n^5 \ast + \frac{2}{9}n^3 \ast - \frac{1}{30}n.$

$\int n^9 \infty \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 \ast - \frac{7}{10}n^6 \ast + \frac{1}{2}n^4 \ast - \frac{1}{12}nn.$

$\int n^{10} \infty \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 \ast - 1\,n^7 \ast + 1\,n^5 \ast - \frac{1}{2}n^3 \ast + \frac{5}{66}n.$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentius inspexerit, eundem etiam continuare poterit absq; his ratiociniorum ambagibus: Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu $\int n^c \infty \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c.c-1.c-2}{2.3.4}Bn^{c-3} + \frac{c.c-1.c-2.c-3.c-4}{2.3.4.5.6}Cn^{c-5} + \frac{c.c-1.c-2.c-3.c-4.c-5.c-6}{2.3.4.5.6.7.8}Dn^{c-7} \ldots$ & ita deinceps, exponentem potestatis ipsius n continuè minuendo binario, quousque perveniatur ad n vel nn. Literæ capitales A, B, C, D &c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$ &c. nempe A $\infty \frac{1}{6}$, B

$\infty - \frac{1}{30}$

$\infty - \frac{1}{30}$, C $\infty\ \frac{1}{42}$, D $\infty - \frac{1}{30}$. Sunt autem hi coëfficientes ita comparati, ut singuli cum cæteris sui ordinis coëfficientibus complere debeant unitatem; sic D valere diximus $-\frac{1}{30}$, quia $\frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{7}{15} + \frac{2}{9} (+D) - \frac{1}{30} \infty\ 1$. Huius laterculi beneficio intra semi-quadrantem horæ reperi, quòd potestates decimæ sive quadrato-surfolida mille primorum numerorum ab unitate in summam collecta efficiunt

$$91,409,924,241,424,243,424,241,924,242,500.$$

E quibus apparet, quàm inutilis censenda sit opera Ismaëlis Bullialdi, quam conscribendo tam spisso volumini Arithmeticæ suæ Infinitorum impendit, ubi nihil præstitit aliud, quàm ut primarum tantum sex potestatum summas (partem ejus quod unicâ nos consecuti sumus paginâ) immenso labore demonstratas exhiberet.

Antequam caput hoc finiamus, paucis adhuc indicare lubet, quomodo suppositis iis, quæ de seriebus figuratis ostensa sunt, possint quævis etiam aliæ series figuratarum analogæ (quæ scil. differentias suas primas, secundas, tertias &c. æquales habent, adeoque ex continua additione terminorum alicujus seriei æqualium generantur) ad homologas figuratas reduci, ac proinde summari, vel postremi ipsarum termini inveniri: Sit series quævis æqualium D, ex cujus additione nascatur series C, & ex hujus additione series B, & ex hujus tandem collectione series A, sumtis ad arbitrium primis serierum terminis d, c, b, a. Vocabitur series A figuratarum analoga, cujus differentiæ primæ constituunt seriem B, secundæ seriem C, tertiæ seriem D, &c. Et quoniam apparet, seriem A componi ex seriebus unitatum 1, 1, 1, 1 &c. lateralium 1, 2, 3, 4. &c.

D	C	B	A.
d	c	b	a
d	$c + d$	$b + c$	$a + b$
d	$c + 2d$	$b + 2c + d$	$a + 2b + c$
d	$c + 3d$	$b + 3c + 3d$	$a + 3b + 3c + d$
d	$c + 4d$	$b + 4c + 6d$	$a + 4b + 6c + 4d$
d	$c + 5d$	$b + 5c + 10d$	$a + 5b + 10c + 10d$

trigonalium 1, 3, 6, 10, &c. pyramidalium 1, 4, 10, 20. &c. in primos differentiarum terminos a, b, c, d, seorsim ductis, quarumque omnium postremi termini & summæ per ante dicta habentur, ipsius quoque

quoque hinc ſeriei A poſtremum terminum & ſummam terminorum obtineri poſſe conſtat; nimirum ſi numerus terminorum vocetur n, erit ultimus terminus ſeriei A ∞ $a + n - 1 . b + \frac{n-1.n-2}{2} c + \frac{n-1.n-2.n-3}{2.3} d$; & ſumma omnium terminorum ∞ $na + \frac{n.n-1}{2} b + \frac{n.n-1.n-2}{2.3} c + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4} d$.

CAPUT IV.

Invenire numerum Combinationum ſecundùm ſingulos exponentes ſeorſim; ubi ſimul oſtenditur, in quot combinationibus una pluresvé res præſcriptæ conjunctim vel diviſim reperiantur.

EX cap. præc. conſtat, numerum combinationum ſecundùm quemcunque exponentem æquari aggregato reſpectivæ ſeriei numerorum figuratorum, ad tot terminos continuatæ, quot fuerint combinandæ res. Quare cùm ibidem ſit oſtenſum, poſito numero terminorum n ſummam ſeriei cujusvis c eſſe $\frac{n.n-1.n-2.n-3 \ldots\ldots n-c+1}{1.2.3.4 \ldots\ldots c}$, ſequitur, eandem hanc quantitatem exprimere quoque numerum combinationum, ſumtis n pro multitudine rerum combinandarum, & c pro exponente combinationis.

Patet autem, quantitatem iſtam deſignari per geminam progreſſionem arithmeticam, unam à numero rerum deſcendentem, aſcendentem ab unitate alteram, quarum communis exceſſus eſt unitas, & utraque tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens c: quippe cùm in utrâque differentia primi & ultimi termini ſit $c - 1$. Unde talis emergit

Regula

pro inveniendis Combinationibus secundùm datum exponentem:

Fiant duæ Progressiones Arithmeticæ, una descendens à numero rerum combinandarum, altera ascendens ab unitate, quarum communis differentia sit unitas, & utraque tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens: tum factum ex ductu terminorum prioris progressionis dividatur per factum ex ductu terminorum posterioris. Quotiens erit quæsita combinationum, quæ secundùm datum exponentem institui possunt, multitudo.

Ita ex. gr. ex 10 diversis rebus sumi possunt quaternarii

$$\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} \infty \frac{5040}{24} \infty 210.$$

Nota: Si plusculæ res ad combinandum sint propositæ, præsertim secundum exponentem itidem majusculum; ut si propositum sit inquirere, quoties ex rebus centum vicenæ possint accipi, supputatio secundum regulam instituenda perquàm prolixa & tædiosa evaderet, excrescente producto multiplicationis ad 40 usque notas. Quare tum, ut quæsitum compendio consequamur, poterimus terminos progressionum ante multiplicationem per communes divisores tollere, hâc ratione:

$$\frac{100.99.98.97.96.95.94.93.92.91.90.89.88.87.86.85.84.83.82.81}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.}$$

Divido utrumq; fractionis terminum per $9 . 11 \infty 99$, per $8 . 12 \infty 96$, per $7 . 13 \infty 91$, per $6 . 14 \infty 84$, per $5 . 17 \infty 85$, & per $2 . 3 . 15 \infty 90$, delendo numeros alteros ex numeratore, ex denominatore alteros, ut fractio ad minores terminos reducta sit hæc:

$$\frac{100 . 98 . 97 . 95 . 94 . 93 . 92 . 89 . 88 . 87 . 86 . 83 . 82 . 81}{1 . 4 . 10 . 16 . 18 . 19 . 20}$$

Deinde

Deinde divido utrinque per 100, delendo ſuperiùs 190, & ſcribendo inferius 2 loco 10.20 ∞ 200; iterum divido per 8, ſcribendo ſuperius 11 loco 88, inferius delendo modò aſcripta 2.4 ∞ 8: porrò quia 5.19 ∞ 95, deleo infra 19, ſupra loco 95 ſcribo 5: divido utrinque per 9, ſcribendo ſuperius 9 loco 81, & inferius 2 loco 18: divido per 4, ponendo ſuperius 23 loco 92, inferius 4 loco 16: tandem divido ter per 2, ſubſtituendo ſuperius 41.43 & 47 loco 82, 86 & 94, inferius delendo omnia. Sic erit reducta ſeries ad hos terminos, 98, 97.93.89.87.83.47.43.41.23.11.9.5; qui in ſe ducti continuè exhibent 535983370403809682970 numerum vicenariorum in rebus centum.

Quòd ſi quis in numeris tam prolixis, ubi exacta præciſio neceſſaria non eſt, eâ quæ ad uſum ſufficit acquieſcere velit, is utiliter & magno cum compendio Logarithmos adhibebit. Nam ſi ſummam Logarithmorum ab 1 ad 20 (quæ reperitur 18.3861244) ſubtrahat à ſummâ Log-orum ab 81 ad 100 (quæ eſt 39.152756,) vel etiam ipſorum tantùm numerorum 98.97.93. &c. (qui poſt inſtitutam progreſſionum reductionem remanſerunt) Logarithmos addat, ſtatim obtinebit 20.7291512 Log-um numeri combinationum quæſiti, qui numerus propter characteriſticam ſui Log-i 20 conſtare debet notis 21. Harum priores quatuor in Canone reperiuntur 5359, ſequentes tres è comparatis proximorum Log-orum differentiis eliciuntur 833, cætera 14 loca cyphris ſuppleri poſſunt, ſic ut quæſitus combinationum numerus ὡς ἐν πλάτει acceptus ſit

5 3 5 9 8 3 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.

Porrò ex allatâ Regulâ, quam pro inveniendis combinationibus ſecundum ſingulos exponentes adduximus, ſequentia manant corollaria:

Cor. 1. In dato quovis rerum numero, creſcente exponente combinationis quouſque medium numeri rerum attigerit, creſcit ipſa combinationum multitudo; creſcente verò ulterius exponente, hæc iterum decreſcit: Ita in rebus octo plures continentur biniones quàm uniones, terniones quàm biniones, quaterniones quàm terniones; ſed ſi pergas ulterius, pauciores invenies quinarios quàm quaternarios, ſenarios quàm quinarios &c. Conf. propr. 6 Tab. num. fig. Etenim 8 vel $\frac{8}{1}$ numerus unionum in rebus octo coontinùè ductus in $\frac{7}{2}.\frac{6}{3}.\frac{5}{4}.$

 $\frac{4}{5}.\frac{3}{6}$

$\frac{4}{5}.\frac{3}{6}.$ &c. ſucceſſivè producit $\frac{8.7}{1.2}$, $\frac{8.7.6}{1.2.3}$, $\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}$, $\frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}$, $\frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.}$ &c. qui juxta regulam ſunt numeri binionum, ternionum, quaternionum, quinionum, ſenionum &c. Unde cùm priorum factorum $\frac{7}{2}.\frac{6}{3}.\frac{5}{4}$ ſinguli ſint majores unitate, reliqui $\frac{4}{5}.\frac{3}{6}$ &c. unitate minores, ſequitur, ſucceſſiva producta ex iſtis factoribus, hoc eſt, numeros combinationum aliquouſque continuè creſcere, & poſtmodùm iterum decreſcere debere. Quòd verò creſcant, donec exponens combinationis dimidium rerum numerum attingit, inde liquet, quòd fractionum iſtarum $\frac{8}{1}.\frac{7}{2}.\frac{6}{3}.\frac{5}{4}.$ &c. (ex quarum continuo ductu numeri combinationum reſultant, quarumque primus numerator perpetuò rerum numerum, denominator primus unitatem æquat) termini ſuperiores & inferiores pro unoquoque ſequentium exponentium binario ſibi propiores fiunt (illis unitatis decrementum, his incrementum paſſis) proindeque ſe mutuò aſſequuntur in tot terminis, quot indicat ſemiſſis primi numeratoris ſive dimidius rerum datarum numerus; poſt quos terminos ipſi denominatores ſuis viciſſim numeratoribus majores fiunt, & ab iis majori ſubinde intervallo recedunt.

Cor. 2. Duo exponentes, qui ſimul componunt ipſum rerum numerum (*quos parallelos* vocabimus) combinationes habent æquè multas. Sic in rebus octo tot habentur ſeptenarii quot unitates, tot ſenarii quot binarii, & tot quinarii quot ternarii, propter $8 \propto 7+1 \propto 6+2 \propto 5+3$. Huc refer propr. 6 & 7 Tab. num. fig. Ratio evidens: Quoties enim ex rebus octo ex. gr. binæ accipiuntur toties utique aliæ ſenæ relinquuntur: ergò toties quoque è converſo ſenæ poſſunt accipi, ſumtis nimirum iis quæ relinquebantur antea & relictis quæ ſumebantur. Idem ex præſcripto regulæ ſic evincitur: Juxta illam numerus binariorum in rebus octo eſt $\frac{8.7}{1.2}$; adjiciantur numeratori & denominatori factores progreſſivi æque-multi, quoad adjectorum ultimus in denominatore primo adjectorum in numeratore æquetur, ſcil. $\frac{6.5.4.3}{3.4.5.6}$; ſic factum ex adjectis æquatur unitati, numeratoribus & denominatoribus inverſo ordine ſe mutuò deſtruentibus; ipſumque adeò productum integrum $\frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6}$ non differt

fert à numero binariorum $\frac{8.7}{1.2}$: patet autem facilè, productum illud indigitare numerum senariorum, seu combinationum quarum exponens unà cum binario datum rerum numerum complet; quandoquidem primus adjectorum in numeratore (qui per hyp. postremo adjectorum in denominatore, h. e. ipsi combinationis exponenti æquatur) à primo omnium seu ipso rerum numero tot unitatibus differt, quot ipsum alii præcedunt, hoc est, quot unitates habet exponens combinationum, quarum numerum præcedentes factores $\frac{8.7}{1.2}$ insinuabant.

Cor. 3. Exponens æqualis semissi numeri rerum, si datus rerum numerus est par; aut duo exponentes contigui quorum summa constituit rerum numerum, si hic est impar, suppeditant maximum numerum combinationum. Fluit ex præcedd Corollariis. Nam ex. gr. in rebus octo numeri septenariorum & unitatum, senariorum & binariorum, quinariorum & ternariorum æquantur. per 2. Coroll. Cùm ergò plures dentur quaternarii, quàm ternarii, binarii vel unitates per 1. Cor. etiam plures erunt quaternarii, quàm combinationes secundùm ullum alium exponentem. Similiter in rebus novem numeri octonariorum & unitatum, septenariorum & binariorum, senariorum & ternariorum, quinariorum & quaternariorum æquantur per 2. Cor. Cùm igitur quinarii & quaternarii quoad suos exponentes sint medio numeri rerum proximi, patet eorundem numeros omnium reliquorum maximos esse, per 1. Cor.

Cor. 4. Numerus combinationum rerum quotcunque secundùm exponentem quemlibet ejusve parallelum æquatur numero permutationum rerum totidem, quæ duûm tantùm sint generum talesque ut res ejusdem generis numero conveniant cum exponentibus parallelis combinationum; putà, tot sunt, ternarii vel quaternarii, in rebus 7, quot permutationes rerum totidem, si tres ipsarum sunt eædem, & reliquæ quatuor eædem. Nam numerus ternariorum juxta regulam $\infty \frac{7.6.5}{1.2.3} \infty \frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3.4 \text{ in } 1.2.3} \infty$ numero permutationum dictarum per Reg. 2. Cap. I hujus.

Cor. 5. In quolibet rerum numero, multitudo combinationum secundùm datum exponentem æquatur summæ combinationum secun-

ſecundùm exponentem antecedentem & datum in numero rerum præcedenti; ex gr. tot ſunt quaterniones in rebus decem, quot terniones & quaterniones ſimul in rebus novem. Namque per regulam numerus quaternionum in rebus decem $\infty \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \infty \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \text{ in } 6 + 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \infty \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \infty \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \infty$ numero quaternionum plus numero ternionum in rebus novem. Aliter ita: Una decem rerum datarum vocetur A; manifeſtum, tot dari præcisè quaternarios in quibus A non reperitur, quot quaternarii ex reliquis novem poſſunt accipi; tot verò eſſe alios in quibus reperitur A, quot terniones comprehenduntur in novem cæteris, ſiquidem ſingulis iſtis ternionibus adjectum ipſum A totidem quaterniones efficit, quos omnes A ingreditur ex conſtruct. Quare cùm quaterniones illi in quibus reperitur A, & in quibus non reperitur, exhauriant omnes quaterniones poſſibiles ex datis rebus accipiendos, conſtat propoſitum. Conf. propr. 4 & 5 Tab. num. fig.

Cor. 6. Numerus combinationum ſecundùm omnes exponentes pares (incluſo nullione) æquatur numero combinationum ſecundùm omnes impares, proinde utervis ſemiſſis eſt numeri omnium combinationum ſimpliciter (incluſo quoque nullione) h. e. cùm iſte in rebus n ſit 2^n per Reg. cap. 2. utervis illorum erit 2^{n-1}. Demonſtratum habetur ibidem ad calcem dicti capitis, ſed idem quoque ex præced. Coroll. ſic deducitur: In rebus ex. gr. novem eſt unus novenarius, ſicut in rebus decem unus denarius, deinde utrobique eſt unus nullio, ac præterea tot ſunt unitates & binarii ſimul in rebus novem, quot ſoli binarii in rebus decem; tot ibi ternarii & quaternarii ſimul, quot hîc ſoli quaternarii; tot quinarii & ſenarii ibi, quot hîc ſenarii; tot denique ſeptenarii & octonarii ibi, quot ſoli octonarii hic, per præced. Coroll. 5. quare numerus omnium ſimpliciter combinationum rerum novem æquatur numero combinationum rerum decem ſecundùm exponentes pares. Rurſus, per idem Coroll. tot habentur in rebus novem nulliones & unitates ſimul, quot unitates tantùm in rebus decem; tot ibi binarii & ternarii ſimul, tot quaternarii & quinarii, tot ſenarii & ſeptenarii, tot denique octonarii & novenarii, quot hic ſeorſim ternarii, quot quinarii, quot ſeptena-

ſeptenarii & quot novenarii: quocirca numerus omnium ſimpliciter combinationum rerùm novem æquatur etiam numero combinationum rerum decem ſecundùm exponentes impares. Ergo numeri combinationum rerum decem ſecundùm exponentes pares & ſecundùm impares inter ſe æquantur. Ecce rem in ſynopſi:

Exponentes Combinat.

Res Combinandæ.		
	X	O + II + IV + VI + VIII + X
	IX	O + I + II + III + IV + V + VI + VII + VIII + IX
	X	I + III + V + VII + IX

Superſunt nobis hìc loci nonnullæ quæſtiones enodandæ, quæ circa combinationum materiam formari poſſunt, ſuumque aliquando uſum habent; ut, cùm indagandum proponitur, in quot combinationibus una pluresve res imperatæ ſive conjunctim ſive diviſim reperiantur. Ejuſmodi quæſtiones cùm in infinitum multiplicari poſſint, omnes ad unum genus Problematis reducere conabimur, quod univerſaliter ſic enunciamus: Dato numero rerum combinandarum & exponente combinationis inveniendum ſit, in quot combinationibus ex aliquot deſignatis rebus nonnullæ, quæ & ipſæ præſcriptæ & determinatæ ſint, excluſis cæteris reperiantur; putà, ſi ex numero rerum omnium n, combinatarum ſecum invicem ſecundùm exponentem c, deſignentur aliquæ A, B, C, D, E, quarum numerus ſit m, ſive major ſive minor exponente c, & quæratur in quot combinationibus deſignatarum nonnullæ A, B, C, quarum numerus ſit b, unà junctæ reperiantur excluſis cæteris D & E. Dico, Problematis generaliter ſic concepti ſolutionem non minus promptam eſſe, ac ſpecialis cujusvis caſus; & numerum combinationum quas recipiunt res $n-m$ ſecundùm exponentem $c-b$ (quique numerus per Regulam invenitur $\frac{n-m.n-m-1.n-m-2.n-m-3\ldots\ldots n-m-c+b+1}{1.2.3.4.5\ldots\ldots c-b}$) ipſi confeſtim quæſito ſatisfacere. Nam quia numerus rerum combinatarum eſt n, & deſignatarum ex illis m, erit exemptis deſignatis reliquarum numerus $n-m$, quas ſi combines inter ſe ſecundùm exponen-

tem $c - b$, habebis novas combinationes, in quibus nulla designatarum reperitur; quare si illarum singulis adjungas præscriptas A, B, C, quarum numerus ponitur b, fiet tum utique combinationum exponens c, ipsæ verò combinationes singulæ comprehendent ex designatis solas A, B, C, seclusis reliquis, quod imperatum fuit. Quòd si numerus b, earum ex designatis, quæ combinationes optatas ingredi debent, sit quidem determinatus, ipsæ verò res non sint determinatæ, sed quomodolibet ex designatis accipiendæ; patet, numerum combinationum hinc toties multiplicari, quoties ex designatis m rebus diversæ b res eligi possunt, nempe per regulam $\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, \ldots\, m-b+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots\, b}$ vicibus; sic ut tum numerus combinationum quæsitus sit $\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, \ldots\, m-b+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots\, b}$ in $\frac{n-m \,.\, n-m-1 \,.\, n-m-2 \,.\, \ldots\, n-m-c+b+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \ldots\, c-b}$

Nota, si $n - m < c - b$, nulla institui potest combinatio, quæ præscriptam conditionem habeat. Sed hæc ad nonnullos speciales casus applicabimus:

Quæritur primò, in quot combinationibus reperiatur data quælibet res? Quia hîc designatur res unica, erit m & $b \infty 1$, adeoque $\frac{n-m \,.\, n-m-1 \,.\, n-m-2 \,\ldots\, n-m-c+b+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \ldots\, c-b} \infty \frac{n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3 \ldots n-c+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \ldots\, c-1}$ ∞ numero combinationum quæsito, qui quidem ad numerum omniū combinationum $\frac{n \;\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3 \ldots n-c+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \ldots\, c}$ se habet ut c ad n, exponens scil. combinationis ad numerum rerum combinatarum, uti constat, si utraque fractio dividatur per $n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3 \ldots n-c+1$, & multiplicetur per $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \ldots\, c$.

2. Sunto jam designatæ res duæ A & B, & definiendus sit combinationum numerus, in quibus reperitur A absque B. Quia hîc $m \infty 2$, & $b \infty 1$, erit numerus quæsitus $\frac{n \,.\, 2 \,.\, n-3 \,.\, n-4 \,.\, \ldots\, n-c}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \ldots\, c-1}$, cujus proinde duplum, numerum combinationum denotabit, in quibus alterutra ipsarum A & B absque alterâ reperitur.

3. Porrò si quæratur, in quot combinationibus reperiantur ambæ

ambæ A & B; fiet, propter m & $b \infty 2$, optatus numerus $\frac{n-2 \,.\, n-3 \,.\, n-4 \,.\, \ldots \,.\, n-c+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, c-2}$.

4. Sin quæratur, in quot combinationibus neutra designatarum reperiatur, invenitur, ob $m \infty 2$ & $b \infty 0$, quæsita combinationum multitudo $\frac{n-2 \,.\, n-3 \,.\, n-4 \,.\, \ldots \,.\, n-c-1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, c}$.

5. Ita etiam si rerum designatarum tres sint, & quæstio sit, quot combinationes ingrediantur duæ A & B absque tertiâ C; quo casu m valet 3 & b 2; quæsitus combinationum numerus invenitur $\frac{n-3 \,.\, n-4 \,.\, n-5 \,.\, \ldots \,.\, n-c}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, c-2}$. Et quia ex tribus ter binæ possunt accipi, triplum illius numerum combinationum exhibebit, quas duæ designatarum quæcunque exclusâ tertiâ ingrediuntur. Atque ita porrò in aliis.

Appendix: Explicatâ numerorum figuratorum naturâ, usuque quem in combinationibus præstant, instituti nostri filum tantisper deseremus, promissi in fine Propos. 7 Part. I facti memores, donec porrò hic ostenderimus, quomodo expectationes duorum collusorum indefinitè ad quotvis deficientes lusus in symbolis exhiberi possint, quod olim quoque Pascalium occupavit; Duo autem præstò sunt modi, quibus id consequi licet: unus reconditior, ex constructione Tabellæ ibidem insertæ & consideratione progressionis, quam numeri illius inter se servant, petitus; quem nunquam se assequi potuisse scribit Pascalius in epistolâ ad Fermatium, ut legere est in hujus operibus Tolosæ impressis A. 1679, p. 180: alter magis planus & obvius, ex combinationum doctrinâ immediatè dimanans, quo Auctor ille in suâ Problematis solutione videtur usus.

I. *Mod.* Sint duo collusores A & B, quorum illi n, huic m ludi ad vincendum desint, & quærenda sit utriusque expectatio, h. e. quærendus sit in dictâ Tabellâ numerus areolæ n columnæ verticalis m. Adjecti intelligantur in columnarum capitellis tot termini progressionis duplæ ab unitate, quota est unaquæque inter columnas; unus primæ, duo secundæ, tres tertiæ columnæ &c. hoc pacto:

	I.	II.	III.	IV.	V.	
					1	
				1	2	
			1	2	4	m
		1	2	4	8	
	1	2	4	8	16	
1	1 : 2	3 : 4	7 : 8	15 : 16	31 : 32	
2	1 : 4	4 : 8	11 : 16	26 : 32	57 : 64	n
3	1 : 8	5 : 16	16 : 32	42 : 64	99 : 128	
4	1 : 16	6 : 32	22 : 64	64 : 128	163 : 256	

Et apparebit primo intuitu, progressiones has duplas ordine continuari per denominatores fractionum in columnis, adeò ut denominator areolæ n columnæ cujuslibet m sit terminus $m + n$ progressionis duplæ ab unitate, i. e. potestas binarii, cujus exponens $m + n - 1$, sive, 2^{m+n-1}. Ad numeratores verò fractionum quod attinet, perpendi debet quòd unusquisq; eorum ex constructione Tabellæ loc. cit. insinuatâ æquetur duobus aliis, quorum unus illi immediatè supra, alter ad sinistram positus est; hinc enim inferri potest, numeratorem areolæ n columnæ cujuslibet æquari quoque summæ omnium n numeratorum columnæ præcedentis unà cum terminis ipsi in vertice adjectis ac prætereà unitati; indeque porrò haud difficilius colligitur, quòd series numeratorum secundæ columnæ (unà cum terminis ipsi præfixis) discerpi possit in duas alias series, tertiæ in tres, quartæ in quatuor, & generaliter columnæ cujuslibet m in alias m series, &c. quarum primæ semper sint series monadum, secundæ series lateralium cum unâ in vertice cyphrâ, tertiæ series trigonalium cum cyphris duabus, quartæ pyramidalium cum cyphris tribus, & ita deinceps, hâc ratione:

Unde

	I.	II.	III.	IV.	V.	
					1+0+0+0+0	*m*
				1+0+0+0	1+1+0+0+0	
			1+0+0	1+1+0+0	1+2+1+0+0	
		1+0	1+1+0	1+2+1+0	1+3+3+1+0	
	1	1+1	1+2+1	1+3+3+1	1+4+6+4+1	
1	1	1+2	1+3+3	1+4+6+4	1+5+10+10+5	*n*
2	1	1+3	1+4+6	1+5+10+10	1+6+15+20+15	
3	1	1+4	1+5+10	1+6+15+20	1+7+21+35+35	
4	1	1+5	1+6+15	1+7+21+35	1+8+28+56+70	

Unde cùm terminus $m+n$, per consect. Cap. 3 hujus, in serie mona-dum sit 1, in serie lateralium $\frac{m+n-1}{1}$, trigonalium $\frac{m+n-1.m+n-2}{1.2}$, pyramidalium $\frac{m+n-1.m+n-2.m+n-3}{1.2.3}$ &c. & generaliter in m serie $\frac{m+n-1.m+n-2.m+n-3\ldots\ldots m+n-m+1\,(n+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots m-1}$; erit numerator areolæ n columnæ cujuslibet m, $1+\frac{m+n-1}{1}+\frac{m+n-1.m+n-2}{1.2}+\frac{m+n-1.m+n-2.m+n-3}{1.2.3}+\ldots\ldots$ usque ad $+\frac{m+n-1.m+n-2.m+n-3\ldots\ldots n+1}{1.2.3.4\ldots\ldots m-1}$. Et quia per Cap. 4. iisdem hujus quantitatis membris etiam multitudo denotatur nullionum, unionum, binionum, ternionum &c. in rebus $m+n-1$ comprehensorum, sequitur dictum numeratorem conflari ex aggregato omnium nullionum, unionum, binionum, cæterarumque ordine combinationum rerum $m+n-1$ usque ad illas inclusivè combinationes, quarum exponens sit $m-1$: idemque proin aggregatum divisum per 2^{m+n-1} exhibiturum totam fractionem datæ areolæ, h. e. per hyp. optatam expectationem collusoris A, seu partem depositi 1, quæ collusori debetur, cui n ludi deficiunt, dum alteri ludi m. Nota: si $m \propto n+1$, hoc est, si collusori B unus tantùm lusus deficiat amplius quàm ipsi A, portio depositi quæ huic debetur æqualis censebitur aggregato combinationum re-

rum $2n$, à nullione ad illas inclusivè quæ habent n pro exponente, diviso per 2^{2n} (qui numerus est omnium simpliciter combinationum rerum $2n$ per Cap. 2) Hinc ergò si demas semissem omnium simpliciter Combinationum (nempe à nullione ad dimidium earum numerum quæ exponente n gaudent, uti colligitur ex Coroll. 2 & 3 hujus) divisum per integram summam omnium absolutè combinationum, h. e. si demas $\frac{1}{2}$ (partem depositi quam contulit collusor A) relinquetur pro lucro ipsius A. sive pro eo quod ipsi ex pecuniâ alterius debetur, semissis combinationum secundùm solum exponentem n divisus per summam omnium absolutè combinationum 2^{2n}; qui quidem semissis cùm se habeat ad $\frac{1}{2}$ (id quod deposuit alter B) ut integer numerus combinationum secundùm exponentem n dictà ratione divisus (hoc est, per Reg. cap. hujus, ut $\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3\ldots n+1}{1.2.3.4\ldots n}$ divisus per 2^{2n}) ad 1, manifestum facit, partem quæ debetur collusori A ex eo quod deposuit alter B, exprimi per $\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3\ldots n+1}{1.2.3.4\ldots n}$ div. per 2^{2n}. Ex. gr. si $n \infty 8$ & $m \infty 9$, h. e. si collusori A deficiant 8 lusus, ipsique B 9, debebitur illi ex pecuniâ hujus portio, $\frac{16.15.14.13.12.11.10}{1.2.3.4.5.6.7.8}$ &c. div. per 2^{15}, quæ portio factoribus paribus numeratoris reâpse octies per 2 divisis, & singulis factoribus denominatoris per 2 multiplicatis reducitur ad fractionem $\frac{1.3.5.7.9.11.13.15}{2.4.6.8.10.12.14.16}$ oriundam ex divisione producti octo primorum imparium per productum totidem primorum parium numerorum. Ipsa solutio Pascaliana, quæ Auctori suo tantopere arrisit.

II. *Mod.* Alter modus solvendi Problema, qui ex consideratione combinationum immediatè fluit, sic habet: Disquiro, quot ludi instituendi sint, ut unus collusorum (nec nisi unus) numerum suorum lusuum necessariò compleat ac vincat; videoque requiri $m+n-1$ ludos: etenim absolutis $m+n-2$ ludis, quorum unus evicerit $m-1$, alter $n-1$ sic ut utriq; unicus desit proximus lusus alterutrum collusorum infallibiliter victorem reddet. Fingo itaque institui ab ipsis $m+n-1$ ludos non quòd paucioribus ludis alterutri constare victoria non possit quâ semel obtentâ finita est alea, sed quia residui

ſidui ad $m+n-1$ ludi, ſi maximè inſtituerentur, complendo quoque alterius numero non ſufficiunt, eoque victori nequicquam præjudicare poſſunt) fingo inquam inſtitui à colluſoribus $m+n-1$ ludos, & conſidero quòd ipſe A depoſito potiatur, quoties accidit ut alter B aut nullum, aut unum, aut duos, aut tres, &c. aut denique $m-1$ horum ludorum, nec plures, evincat; id verò tot caſibus contingere poſſe liquet, quot nulliones, uniones, biniones, terniones, &c. ac deniq; combinationes ſecundùm exponentem $m-1$ in ludis $m+n-1$ continentur. Quare cùm totidem caſus habeat A ad obtinendum depoſitum 1, & reliquos ad perdendum, ſitq; numerus omnium caſuum 2^{m+n-1} ceu omnium ſimpliciter combinationum; erit ipſius ſors per 1. Cor. 3. Prop. 1. part. æqualis aggregato dictarum combinationum (à nullione ad illas incluſivè, quæ exponente $m-1$ gaudent) diviſo per 2^{m+n-1}, ut ſupra. Nota: ſi numeri deficientium luſuum m & n exiguo differant, ſatius eſt quærere per 5. Coroll. cit. Prop. quantitatem ſolius lucri, ſeu quantitatem expectationis colluſoris A non reſpectu totius depoſiti ſed reſpectu ſolius pecuniæ alterius. Ex. gr. ſit $m \infty n+1$, adeoque $m+n-1 \infty 2n$; denotabitur numerus caſuum, quos habet A ad obtinendam pecuniam alterius (quæ nunc ſit 1) per numerum combinationum in ludis $2n$ ab exponente 0 uſque ad exponentem n; & numerus caſuum, quos habet ad perdendum tantundem, h. e. ad obtinendum -1, per numerum reliquarum combinationum ſecundùm exponentes ſuperiores: quare cùm bini exponentes paralleli, inferior & ſuperior, per Cor. 2 hujus combinationes habeant æque-multas, eoq; ſe mutuò deſtruant, relinquentur pro exceſſu, quo numerus illarum combinationum harum numerum ſuperat, ſolæ combinationes ſecundùm exponentem n ſemiſſem ipſius $2n$, quarum numerus eſt $\frac{2n.2n-1.2n-2.....n+1}{1.2.3.4...n}$, ſic ut inde per dictum Coroll. 5. lucrum colluſoris A reſpectu pecuniæ alterius emergat $\frac{2n.2n-1.2n-2.....n+1}{1.2.3.4...n}$ div. per 2^{2n}, itidem ut ſupra. Neque abſimili modo definietur hoc lucrum in caſu $m \infty n+2$, aut $m \infty n+3$ &c. Reperio autem, quòd dato numero n, lucrum ipſius A in caſu $m \infty n+1$, ſit ad lucrum illius in caſu $m \infty n+2$,

in

in ratione $n+1$ ad $2n+1$; & lucrum in casu $m \infty n+2$, ad lucrum in casu $m \infty n+3$, in ratione $2n+4$ ad $3n+4$. &c.

In gratiam eorum, qui speculationibus numerorum delectantur, obiter adhuc addo duas proprietates Tabellæ Prop. 7. Part. 1 subnexæ è quarum utràvis idem quæsitum exsculpi potuisset. Una est, quòd numeratores columnæ verticalis tertiæ sint Trigonales 3, 6, 10, 15, 21. &c. aucti numeratoribus columnæ $2^{dæ}$ 4, 5, 6, 7, 8, &c. quòd numeratores col. quartæ sint Pyramidales 4, 10, 20, 35, 56, &c. aucti numeratoribus $3^{tiæ}$ 11, 16, 22, 29, 37, &c. numeratores columnæ $5^{tæ}$ Triang. Pyramidales 5, 15, 35, 70, 126, &c. aucti numeratoribus $4^{tæ}$ 26, 42, 64, 93, 130, &c. incipiendo perpetuò à secundis terminis. Altera, quòd numeratores col. $3^{tiæ}$ sint Trigonales 6, 10, 15, 21, &c. aucti numeratoribus primæ 1, 1, 1, 1, &c. numeratores $4^{tæ}$ Pyramidales 10, 20, 35, 56, &c. aucti numeratoribus $2^{dæ}$ 5, 6, 7, 8, &c. numeratores $5^{tæ}$ Triang. Pyramidales 15, 35, 70, 126, &c. aucti numeratoribus $3^{tiæ}$ 16, 22, 29, 37, &c. initio semper facto à tertiis; atque sic porrò.

CAP. V.

Invenire numerum combinationum, cùm quælibet rerum combinandarum à cæteris quidem diversa existit, attamen sæpiùs in eâdem combinatione recurrere potest.

IN Combinationibus præcedd. capitum nullam rem secum ipsâ jungi, neque adeò plus semel in eâdem combinatione accipi posse supposuimus; nunc verò hanc insuper conditionem adjiciemus, ut unaquæque res etiam secum ipsâ jungi, adeoque in eâdem combinatione sæpiùs redire queat.

Sunto igitur combinandæ hâc ratione literæ *a*, *b*, *c*, *d*, &c.

Fiant

Fiant tot ſeries quot literæ, & ſingularum capita occupent ſingulæ literæ, ceu totidem uniones, ut factum cap. 2.

Pro binionibus cujusque ſeriei inveniendis, litera, quæ ejus caput eſt, non tantum cum omnibus præcedentibus literis, ut ibi factum fuit, ſed & ſecum ipsâ combinari debet: ſic habebitur in primâ ſerie unus binarius *aa*; in ſecundâ duo binarii *ab*, *bb*; in tertiâ tres *ac*, *bc*, *cc*; in quartâ quatuor *ad*, *bd*, *cd*, *dd*. &c.

Sic etiam pro formandis ternariis unaquæque litera non modò omnium præcedentium ſerierum, ſed & ſuæmet ſeriei binariis adjungenda: ut habeantur, in primâ ſerie ternarius unus *aaa*; in ſecundâ ternarii tres *aab*, *abb*, *bbb*; in tertiâ ſex *aac*, *abc*, *bbc*, *acc*, *bcc*, *ccc*; & ſic deinceps.

Atque hoc ipſum quoque in combinationibus omnium aliorum exponentium obſervandum; quâ ratione nullam electionum, quæ circa datas res inſtitui queunt, præteriri poſſe liquidò conſtat. En Schema:

a. aa. aaa.

b. ab. bb. aab. abb. bbb.

c. ac. bc. cc. aac. abc. bbc. acc. bcc. ccc.

d. ad. bd. cd. dd. aad. abd. bbd. acd. bcd. ccd. add. bdd. cdd. ddd.

Hinc verò haud difficulter colligimus, uniones omnium ſerierum rurſus efficere ſeriem monadum, biniones ſeriem lateralium, terniones trigonalium, cæterasque combinationes majorum exponentium itidem conſtituere ſeries aliorum figuratorum altioris generis, prorſus ut combinationes præcedd. capitum, hoc ſolo cum diſcrimine, quòd ibi ſeries à cyphris, hic ab ipſis ſtatim unitatibus incipiant; unde ſi in Tabulam redigantur, hanc diſpoſitionem præ ſe ferent:

Tabula Combinatoria.

Exponentes Combinationum.

Numeri Rerum Combinandarum.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582
10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960

Tabulæ autem ita diſpoſitæ duas præcipuè proprietates notare convenit: 1. Quòd columnæ transverſæ congruunt verticalibus, prima primæ, ſecunda ſecundæ, tertia tertiæ, &c. 2. Quòd ſumtis duabus columnis contiguis, ſive verticalibus ſive transverſis, termi-

terminorum numero æqualium, ſumma terminorum columnæ præcedentis æquatur poſtremo termino columnæ ſequentis.

E quibus facile eſt, invenire ſummam terminorum ſeriei cujusvis, adeoque & numerum combinationum ſecundùm exponentem quemcunque. Nam ſi numerus terminorum, hoc eſt, rerum combinandarum dicatur n, erit ſumma unionum ſeu terminorum ſeriei primæ, hoc eſt, ultimus terminus ſeriei ſecundæ, itidem n.

Intelligatur ſeriei ſecundæ præfixa cyphra, ut numerus terminorum fiat $n+1$; per cujus dimidium ſi multiplicetur terminus ultimus n, erit productum $\frac{n.n+1}{1.2}$ ſumma binionum ſeu terminorum ſecundæ ſeriei, per 12 propr. cap. 3; adeoque & poſtremus terminus tertiæ, per 2 propr. hujus.

Intelligantur ſeriei tertiæ præfixæ duæ cyphræ, fietque numerus terminorum $n+2$; in cujus trientem ſi ducatur terminus ultimus modò inventus $\frac{n.n+1}{1.2}$ exurget $\frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}$ ſumma ternionum ſeu terminorum ſeriei tertiæ, & ſimul etiam poſtremus 4tæ. per eaſdem.

Eâdem ratione ſumma terminorum quartæ ſeriei ſeu quaternionum invenitur $\frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.2.3.4}$, quintæ ſeriei ſeu quinionum $\frac{n.n+1.n+2.n+3.n+4}{1.2.3.4.5}$; & in genere ſumma terminorum ſeriei c, ſeu combinationum ſecundùm exponentem c, reperitur $\frac{n.n+1.n+2.n+3\ldots\ldots n+c-1}{1.2.3.4\ldots\ldots c}$. Ubi notandum, quòd exiſtente $c > n$ factores fractionis poſſunt abbreviari dividendo numeratorem & denominatorem per $n.n+1.n+2\ldots\ldots c$, ut habeatur $\frac{c+1.c+2.c+3\ldots\ldots c+n-1}{1.2.3.4\ldots\ldots n-1}$; & quia hæc fractio ad formulam exacta ſimul indicare debet ſummam $c+1$ terminorum ſeriei $n-1$, ſequitur quòd aggregatum n terminorum in ſerie c ſemper æquetur aggregato $c+1$ terminorum in ſerie $n-1$; quæ alia non inelegans hujus Tabellæ proprietas eſt. Inde verò reſultat ſequens

Regula

pro inveniendis combinationibus secundùm datum exponentem, cùm eadem res eandem combinationem sæpiùs ingredi potest.

Fiant duæ Progressiones Arithmeticæ ascendentes, altera à numero rerum combinandarum, ab unitate altera, quarum communis excessus sit unitas, & utraque tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens: tum factum ex ductu terminorum prioris progressionis dividatur per factum ex ductu terminorum posterioris; eritque quotiens quæsita combinationum secundùm datum exponentem multitudo. Hoc sensu numerus quaternionum in 10 diversis rebus contentorum est $\frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ ∞ $\frac{17160}{24}$ ∞ 715.

Nota: Si combinationis exponens sit major rerum numero (quod utique fieri posse in præsente hypothesi liquet) compendiosius erit, inchoari priorem progressionem ab hoc exponente unitate aucto, & utramque fieri terminorum uno pauciorum, quàm sunt datæ res. Ita numerus combinationum secundùm exponentem 10 in rebus 4 fit $\frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ∞ $\frac{1716}{6}$ ∞ 286.

Sed & numerum combinationum secundùm plures exponentes ab unitate se aliquousque consequentes, hoc est, summam serierum quotcunque verticalium, nihilo difficiliùs venari licet: Cùm enim ex. gr. 10 primi termini 4 primarum columnarum verticalium iidem sint qui 4 primi termini 10 primarum transversarum atque insuper summæ horum terminorum æquentur undecim terminis 4ᵗᵃ columnæ verticalis demto solo primo seu unitate (singulæ scil. summæ singulis terminis, ut ex propr. 2ᵈᵃ Tabellæ liquet) manifestum est, etiam 10 primos terminos 4 primarum columnarum verticalium, h. e. summam omnium unionum, binionum, ternionum & quaternionum sumendorum ex rebus 10, unitate deficere ab undecim primis terminis

nis columnæ $4^{tæ}$, hoc eſt, à numero quaternionum ſumendorum ex rebus 11. hoc eſt, à numero combinationum ſumendarum ex rebus unà pluribus ſecundùm datorum exponentium maximum. Quod idem etiam ſic oſtendo: Singulos quaterniones ſumendos ex rebus undecim res undecima vel non ingreditur planè, vel ingreditur ſemel, vel bis, vel ter, vel quater; ſed manifeſtum eſt, quaterniones, quos res undecima non ingreditur, eſſe illos ipſos quos decem reliquæ inter ſe formare poſſunt; nec minus perſpicuum, quòd numerus illorum quos ſemel tantum dicta res undecima ingreditur, æquari debeat numero ternionum ſumendorum ex 10 reliquis; ſicut etiam numerus illorum quos bis ingreditur, numero binionum; & quos ter ingreditur, numero unionum: quandoquidem ternionibus ſemel, binionibus bis, & unionibus ter adjuncta quaterniones efficit: prætereaque conſtat, quòd unus ſit quaternio, quem res undecima quater repetita conſtituit. Unde concluditur, numerum quaternionum comprehenſorum in rebus 11, hoc eſt, unâ pluribus quàm ſunt datæ res, unitate excedere omnes ſimul uniones, biniones, terniones & quaterniones rerum datarum decem; niſi his quoque nullionem accenſere velimus, quo caſu ipſis æquabitur.

Quapropter, cùm exiſtente numero rerum datarum n, & exponentium maximo c, numerus combinationum hujus exponentis in rebus $n+1$ per Reg. cap. 4. inveniatur $\frac{n+1 . n+2 . n+3 . n+4 \ldots n+c}{1 . 2 . 3 . 4 \ldots c}$, fiet numerus combinationum rerum n ſecundùm omnes exponentes ab 1 uſque ad c (utpote unitate ab illo deficiens) $\frac{n+1 . n+2 . n+3 . n+4 \ldots n+c}{1 . 2 . 3 . 4 \ldots c} - 1$. Quòd ſi c majus ſit ipſo n, hoc eſt, exponentium maximus major rerum numero, poterunt fractionis termini eo caſu dividi per $n+1 . n+2 . n+3 \ldots c$, ac proinde quantitas compendioſiùs exprimi, ita $\frac{c+1 . c+2 . c+3 \ldots c+n}{1 . 2 . 3 . 4 \ldots n} - 1$. Hinc talis emergit

Regula.

pro inveniendis Combinationibus secundùm plures exponentes ab unitate se consequentes:

Constituantur duæ Progressiones Arithmeticæ ascendentes, altera à numero rerum combinandarum unitate aucto, ab ipsâ unitate altera, quarum communis excessus sit unitas, & utraque tot terminorum, quot unitatibus constat exponentium maximus. (Quòd si tamen exponentium maximus major sit rerum numero, satiùs est, priorem inchoari ab hoc exponente unitate aucto, & utramque fieri tot terminorum, quot sunt datæ res.) Tum factum ex ductu terminorum prioris progressionis dividatur per factum ex ductu terminorum posterioris; eritque quotiens quæsita combinationum multitudo, si scil. ipsum nullionem unà comprehensum velis; sin velis exclusum, quotiens unitate multatus quæsitum indicabit. Ita numerus omnium cum nullione unionum, binionum, ternionum & quaternionum in rebus 10 est $\frac{11.12.13.14}{1.2.3.4}$ ∞ $\frac{24024}{24}$ ∞ 1001, in rebus tantum tribus $\frac{5.6.7}{1.2.3}$ ∞ $\frac{210}{6}$ ∞ 35; at nullione excluso numerus combinationum est ibi 1000, hic 34.

Caput VI.

Invenire numerum combinationum, cum nonnullæ rerum combinandarum sunt eædem, nulla verò sæpiùs in combinatione repeti debet, quàm ipsa reperitur in toto rerum numero.

In

IN præced. capite licitum erat, quamlibet datarum diverſarum rerum ſecum ipsâ conjungere toties in combinatione, quot unitates habet ejus exponens; quo pacto dari poteſt combinatio ſecundùm exponentem quemlibet, quæ ex unâ ſolâ re ſæpiùs repetitâ conſtet. Alia quæſtio eſt, cùm determinatus eſt numerus vicium, quibus unaquæque rerum datarum ſecum ipsâ jungi poteſt: ut cùm combinandæ veniunt literæ *a*, *b*, *c*, *d*, eâ lege, ut in nullâ combinatione litera *a* ſæpiùs quàm quinquies, *b* quàm quater, *c* quàm ter, & *d* quàm bis repetatur; ubi manifeſtum eſt, nullam earum combinationum, quarum exponens quinarium ſuperat, ex unâ ſolâ literâ conflari poſſe.

Tantundem autem eſt, ſi quatuor iſtæ literæ dictâ lege inter ſe combinandæ ſunt, acſi datæ forent literæ quatuordecim, interque illas quinque *a*, quatuor *b*, tria c & duo *d*, modis omnibus inter ſe combinandæ, ſed eâ conditione, ut nulla ſæpiùs in combinatione occurrat, quàm ipſa reperitur in toto rerum numero; hoc eſt, acſi data foret quantitas algebraica *aaaaabbbbcccdd* ſive $a^5b^4c^3d^2$, cujus omnes diviſores quærerentur; quandoquidem diviſores alicujus quantitatis aliter non exprimuntur, niſi per totidem combinationes factorum ejus: adeò ut doctrina hujus capitis præcipuè pro inveniendo numero diviſorum datæ alicujus quantitatis inſervire queat.

Liquet primò, unius literæ *a* tot electiones aut diviſores dari poſſe, quoties ipſa in rerum numero occurrit, ſeu quot ipſi in quantitate tribuuntur dimenſiones; adeoque ſi nullionem electionibus vel unitatem diviſoribus accenſere quoque velis, unam dari electionem aut diviſorem ampliùs, putà ſex: 1, *a*, *aa*, a^3, a^4, a^5.

Deinde, ſi litera *b* accedat, conſtat illam in ſingulas ſex præcedentium electionum aut diviſorum duci poſſe; unde totidem aliæ naſcuntur electiones; *b*, *ab*, *aab*, a^3b, a^4b, a^5b. Quibus ſi alterum *b* adjungas, ſex novas electiones habebis; *bb*, *abb*, *aabb*, a^3bb, &c. Et his ſi tertium *b* applicetur, ſex aliæ electiones emergent, iterumque ſex aliæ, ſi his applicetur quartum: adeò ut litera *b* toties ſex novas electiones ſuppeditet, quoties ipſa in dato rerum numero occurrit, ſeu quot ipſa in propoſitâ quantitate dimenſiones

obtinet

obtinet; nimirum quater sex electiones; quas omnes b ingreditur ex constructione. Unde si his sex primas electiones, quas b non ingreditur, annumeres, habebis in universum quinquies sex sive 30 electiones.

In singulas porrò harum 30 electionum seu divisorum si tertia litera c ducatur, prodibunt 30 novæ electiones; & si proditurís eadem litera adjungatur denuò, prodibunt 30 aliæ; iterumque 30 aliæ, si applicetur tertiùm: unde ter 30 electiones exurgunt, in quibus omnibus lit. c reperitur. Quibus proin si addas præcedentes 30, in quibus illa non reperitur, numerabis in totum quater 30 sive 120 electiones.

Tandem si singulas harum 120 electionum vel divisorum eâdem ratione per quartam literam d ob duas ejus dimensiones bis multiplices, produces bis 120 novas electiones, quæ omnes literam d continent; adeoque (computatis unà prioribus 120 quæ eandem non continent) omninò ter 120 sive 360 electiones. Et tantus quoque in universum divisorum numerus existit propositæ quantitatis $a^5 b^4 c^3 d^2$, dummodò, quòd hic semper subintelligendum est, literæ a, b, c & d totidem primos ab unitate & à se invicem diversos numeros indigitent. Patet autem, accessione cujusque literæ numerum omnium præcedentium electionum vel divisorum toties multiplicari, & semel ampliùs, quot literæ accedentis fuerint dimensiones. Quo observato ratio percipi potest sequentis Regulæ:

Regula

pro investigando numero divisorum alicujus quantitatis datæ, sive numero combinationum rerum plurium, quarum nonnullæ sunt eædem:

Numeros dimensionum, quibus constant singulæ diversæ literæ quantitatem propositam constituentes, unitate auge, sicque auctos in se invicem ducito: erit productum eorum continuum numerus omnium diviso-

divisorum datæ quantitatis, seu omnium combinationum, quarum literæ illam constituentes sunt capaces. Ubi tamen unitatem demere memineris, si nullionem è combinationibus aut unitatem è divisoribus expunctam velis. Ex. gr. in quantitate propositâ $a^5 b^4 c^3 d^2$ literæ a, b, c, d dimensiones habent 5, 4, 3, 2, qui numeri unitate sigillatim aucti efficiunt 6, 5, 4, 3, hi verò in se ducti 360 numerum omnium cum nullione combinationum, seu omnium cum unitate divisorum quantitatis datæ.

Nota: Si numerus diversarum literarum a, b, c, d datam quantitatem constituentium sit n, omnesque literæ æquali dimensionum numero gaudeant, qui sit p; fiet per regulam numerus combinationum vel divisorum $\overline{p+1}^{\,n}$. Et specialiùs si p ∞ 1, hoc est, si datæ quantitatis singulæ literæ unam tantùm dimensionem habent, aut si datæ res combinandæ omnes sunt diversæ, numerus divisorum vel combinationum determinatur ad 2^n, reditque hypothesis capitis secundi; cujus proinde solutio cum istâ conferri poterit, ut utriusque convenientia appareat.

Qui autem ad discursum præsentis capitis vel leviter attenderit, facilè porrò si opus determinabit, in quot electionibus vel divisoribus quælibet res aut litera reperiatur. Nam si quæratur ex. gr. quot divisores propositæ quantitatis $a^5 b^4 c^3 d^2$ ingrediatur litera a, indagandum solummodò est, quot divisores inclusâ unitate admittat reliqua quantitas $b^4 c^3 d^2$; his enim (cùm in iis a non reperiatur) si literam istam adjungas semel, habebis omnes divisores, in quibus a reperitur unius dimensionis: & si adjungas bis, habebis omnes eos in quibus est duarum dimensionum: & si ter, illos in quibus trium &c. unde concluditur, tot esse divisores, in quibus litera quælibet secundùm eundem dimensionum numerum reperitur, quot reliquæ literæ in universum divisores admittunt: cùm igitur quantitas $b^4 c^3 d^2$ per regulam præced. recipiat 5 . 4 . 3 ∞ 60 divisores (connumerando illis unitatem) complectetur etiam quantitas $a^5 b^4 c^3 d^2$ divisores totidem, in quibus a unam obtinet dimensionem, totidemque in quibus duas, tres &c. dimensiones; adeoque ob quinque dimensiones ipsius a quinquies 60 sive 300 divisores obtinebit, in

quibus iſta litera utcunque ſecundùm aliquem dimenſionum numerum occurrit. Neque difficiliùs definitur numerus electionum aut diviſorum, in quibus reperiantur ex. gr. duæ literæ, a cum duabus & b cum tribus dimenſionibus; nam ſi ſingulis diviſoribus reliquæ quantitatis $c^3 d^2$ (quorum numerus per regulam invenitur $4 . 3 \infty 12$) adjungas $a^2 b^3$, palàm eſt oriri totidem diviſores optatæ conditionis, nec dari plures, & ſic in aliis.

Plus difficultatis babere forſan videbitur quæſtio, quæ numerum inire iubet diviſorum omnium ex æque-multis dimenſionibus conſtantium, hoc eſt, combinationum ſecundùm ſingulos exponentes ſeorſim. Ad id perquirendum methodum adhibeo, ſimilem illi, quâ ſupra in part. 1, poſt prop. 9 ad numeros jactuum in teſſeris inveſtigandos fui uſus: Scribo ordine omnes exponentes combinationum ſeu omnes dimenſionum numeros, quarum propoſita quantitas capax eſt, nempe à 0 uſque ad 14 pro quantitate $a^5 b^4 c^3 d^2$. Sub horum primis colloco ſex unitates, unâ vid. plures quàm eſt numerus dimenſionum primæ literæ, quibus ſubjungo ſex alias unitates, & his rurſum ſex alias &c. donec habeam ſeries unitatum unâ plures quàm eſt numerus dimenſionum ſecundæ literæ, ſed ſingulas ſeries uno gradu dextrorſum promoveo, atque tum addo quæ perpendiculariter in eodem gradu ſibi reſpondent unitates, ut fiant numeri 1, 2, 3, 4, &c. Horum deinde numerorum iterum ſeries unâ plures conſtituo quàm eſt numerus dimenſionum tertiæ literæ, illas ſimiliter gradatim ad dextram promovendo, & poſtmodùm addendo, ut prodeant numeri 1. 3, 6, 10, 14 &c. quorum numerorum mox rurſus ordines uno plures, quàm eſt numerus dimenſionum quartæ, gradatim pono & addo, continuaturus eodem tenore ulteriùs, ſi plures literæ adeſſent. En Tabulam:

Numeri

Numeri dimensionum seu Exponentes combinationum:

Quantit. sive Res combinandæ.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
a^5	1	1	1	1	1	1									
		1	1	1	1	1	1								
			1	1	1	1	1	1							
				1	1	1	1	1	1						
					1	1	1	1	1	1					
a^5b^4	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1					
		1	2	3	4	5	5	4	3	2	1				
			1	2	3	4	5	5	4	3	2	1			
				1	2	3	4	5	5	4	3	2	1		
$a^5b^4c^3$	1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1		
		1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1	
			1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1
$a^5b^4c^3d^2$	1	4	10	19	30	41	49	52	49	41	30	19	10	4	1

Quo facto qui ex additione ultimâ resultant numeri singuli, denotabunt multitudinem divisorum vel combinationum secundùm singulos dimensionum numeros seu exponentes supra scriptos. Sic indicante Tabellâ reperio, quòd quantitas proposita habeat unum divisorem nullius, 4 divisores unius, 10 duarum, 19 trium &c. dimensionum, sive, quòd habeat unum nullionem, 4 uniones, 10 biniones, 19 terniones, & sic porrò; qui omnes collectivè sumti summam conficiunt 360, ut oportebat. Qui rationem similis operationis pro tesseris intellexerit, rationem hujus quoque non difficulter capiet.

Plura de his, divisoribus præsertim (at nimium ab instituto aliena) legere est in 5 prioribus sectionibus miscellaneis Exercit. Matth. Fr. Schootenii, nec non cap. 3 & 4 Differt. Joh. Wallisii de combinationibus Tractatui ejus de Algebrâ subnexæ. Quos Auctores adeat qui volet. Nos properamus ad alia.

CAP. VII.

De Combinationibus & Permutationibus mixtim spectatis.

IN Combinationibus, de quibus hucusque sermo nobis fuit, nulla ordinis sitûsque ratio habebatur, & unum eundemque ex. gr. ternarium constituere intelligebantur literæ a, b, c, quocunq; scriberentur ordine, seu abc, seu acb, seu bac &c. Sed quandoque præter complexionum varietatem ipsa quoq; ordinis & dispositionis variatio in rebus combinandis attendenda est; quemadmodum fieri solet in vocibus & numeris: Alia enim vox est vel syllaba ab, & alia ba; & alius numerus 12, alius 21; quanquam eædem literæ eædemque notæ numerales concurrant ad formandas tum syllabas ab & ba, tum numeros 12 & 21; sic ut totum discrimen à diversâ earundem dispositione proficiscatur.

Restat itaque. ut hoc & sequentibus capitibus combinationum & permutationū doctrinam mixtim contemplemur, indagando, quàm variè plures diversæ res, aut quarum nonnullæ sunt eædem, & combinari secum invicem, & combinatæ inter se transponi possint, idq; nunc secundùm unum exponentem, nunc secundùm plures; & modò sic, ut nulla rerum datarum secum ipsa combinari debeat, modo sic, ut quælibet etiam secum ipsa combinari, pluriesque adeò in eâdem combinatione repeti queat.

1. *Invenire numerum electionum plurium diversarum rerum, quarum nulla secum ipsa combinari debet, secundùm unum exponentem.*

Solutio quæstionis ex præcedentibus promta est & facilis: Si multitudo rerum combinandarum dicitur n, atque exponens combinationis c, numerus combinationum neglectâ consideratione ordinis inter res combinatas est $\frac{n.n-1.n-2.n-3\ldots\ldots n-c+1}{1.2.3\ 4\ldots\ldots c}$ per cap. 4. Et quia singulæ hæ combinationes ex hypoth. constant rebus

bus diversis c, quæ per cap. 1. ordinem inter se variare possunt $1.2.3.4.....c$ vicibus, sequitur, si & ordinis in combinationibus habeatur ratio, earum numerum totidem quoque vicibus majorem fore quàm ubi hæc consideratio negligitur, ac proinde æquari $\frac{n.n-1.n-2.n-3.....n-c+1}{1.2.3.4.....c}$ in $1.2.3.4.....c$ ∞ $n.n-1.n-2.n-3.....n-c+1$; id quod sequentem Regulam suggerit:

Regula

pro inveniendo numero combinationum secundùm datum exponentem:

Constituatur Progressio Arithmetica, cujus communis differentia sit 1, incipiens à numero rerum combinandarum, & descendens per tot terminos, quot unitates habet combinationis exponens; eritque factum ex ductu terminorum ejus quæsita combinationum multitudo. Ex. gr. Quaterniones omnes in rebus 10, iique modis omnibus transpositi sunt 10. 9. 8. 7 ∞ 5040.

Consectaria: 1. Si combinationis exponens ipsi rerum numero æquatur, tantundem est, acsi simplices permutationes rerum datarum quærerentur; quippe cùm omnes semper simul accipiendæ, quæ hypothesis est capitis 1: eritque tum
$n.n-1.n-2.n-3....n-c+1$ ∞ $n.n-1.n-2.n-3....1$ ∞ $1.2.3.4....n$, quod convenit cum regulâ cap. 1.

2. Omnes res simul acceptæ, hoc est, combinatæ secundùm exponentem æqualem rerum multitudini, tot recipiunt permutationes ordinis, quot recipiunt earundem combinationes omnes secundùm exponentem unitate minorem: Ita res 5 toties disponi possunt diversimodè quinæ, quoties quaternæ; nam permutationes omnes quinque rerum sunt 1.2.3.4.5 seu 5.4.3.2.1 per regulam hujus & primi capitis; & permutationes quaternionum omnium sunt

5 . 4 . 3 . 2 per eandem hanc regulam: eſt verò 5 . 4 . 3 . 2 ∞ 5 . 4 . 3 . 2 . 1. unde liquet &c.

3. Summa unionum & binionum in rebus quotlibet æquatur quadrato numeri rerum: poſito namque rerum numero *n*, unionum numerus juxta regulam eſt *n*, & binionum $n . n - 1 \infty nn - n$; quorum ſumma $n + nn - n \infty nn$. Sic ex. gr. colligere poſſumus, 9 notas numerales ſignificativas acceptas ſingulas & binas modis omnibus conſtituere novies 9 ſeu 81 diverſos numeros; totidem ſcil. ab 1 ad 100 reâpſe invenimus non plures, ſi reſecemus illos, quos vel cyphra ingreditur, vel idem geminatus character conſtituit.

4. Numerus combinationum ſecundùm exponentem quemlibet æquatur numero permutationum rerum totidem, quarum tot ſint eædem, quot unitates habet exponentis parallelus, reliquarum verò ſingulæ à ſingulis diverſæ. Sic tot ſunt ternarii in rebus 8, quot permutationes rerum 8, quarum 5 ſunt eædem, nempe 8 . 7 . 6 $\infty \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5} \infty$ num. permutat. per Reg. 2. cap. 1. hujus.

2. ***Invenire numerum electionum plurium diverſarum rerum, quarum nulla ſecum ipſa combinanda eſt, abſolutè ſeu ſecundùm omnes exponentes.***

Si addantur numeri combinationum per præced. regulam ſecundùm ſingulos exponentes ſeorſim quæſiti obtinebitur numerus omnium combinationum abſolutè. Idem tamen paulò expeditiùs inveniri poteſt, ſi attendatur ad proprietatem aliquam non contemnendam, quæ ex collatis duobus ejusmodi numeris elicitur.

Sint primò combinandæ res quatuor: Conſtat per præced. reg. numerum unionum eſſe 4, binionum 4 . 3, ternionum 4 . 3 . 2, quaternionum denique 4 . 3 . 2 . 1; & propterea numerum omnium combinationum abſolutè 4 + 4 . 3 + 4 . 3 . 2 + 4 . 3 . 2 . 1.

Sint dein combinandæ res quinque; ubi ſimili modo colligitur, ſummam unionum, binionum, ternionum, quaternionum & quinionum, ſeu numerum omnium abſolutè combinationum eſſe 5 + 5 . 4 + 5 . 4 . 3 + 5 . 4 . 3 . 2 + 5 . 4 . 3 . 2 . 1. Eſt verò 5 + 5 . 4 + 5 . 4 . 3 + 5 . 4 . 3 . 2 + 5 . 4 . 3 . 2 . 1 ∞ 5 in

1 + 4

$\overline{1+4+4\cdot3+4\cdot3\cdot2+4\cdot3\cdot2\cdot1}$, hoc eſt, numerus combinationum rerum 5 quinquies major numero combinationum rerum 4 unitate aucto. Unde diſcimus, numerum combinationum in rebus quotcunque datis toties excedere numerum combinationum in rebus unâ paucioribus unitate auctum, quot ſunt datæ res. (Intellige, non computato utroque nullione.)

Quocirca cùm unius rei unica ſit electio, addito 1 ad 1 ſummâque 2 multiplicatâ per 2, erit productum 4 numerus omnium combinationum in rebus duabus.

Rurſus addito 1 ad 4, ſummâque 5 multiplicatâ per 3, ſignificabit productum 15 numerum combinationum in rebus tribus.

Similiter addito 1 ad 15, ſummâque 16 ductâ in 4, exurgit 64 numerus combinationum in rebus quatuor.

Hunc unitate auctum ſi ducas in 5, habebis omnes combinationes rerum quinque; atque ita porrò in infinitum, ut ex ſequenti laterculo apparet.

Num. rer. datarum	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	&c.
Num. combination.	1.	4.	15.	64.	325.	1956.	13699.	109600.	986409.	9864100.	&c.

Hâc ratione colligimus, 9 notas numerales, ſi ſumantur ſingulæ, binæ, ternæ, &c. & tandem novenæ, ac transponantur modis omnibns, recipere 986409 mutationes, totidemque proin diverſos numeros formari poſſe, in quorum nullo character aliquis plus unâ vice occurrat.

CAPUT VIII.

3. *Invenire numerum electionum plurium diverſarum rerum, cùm qualibet earum etiam ſecum ipſa combinari poteſt, ſecundùm unum exponentem.*

In

IN cap. præced, quæsitus fuit combinationum numerus, quando nulla res plus semel in eâdem combinatione repeti poterat. Nunc supponemus, rem quamlibet etiam secum ipsâ jungi, adeoque bis, ter, quater pluriesvé in eâdem combinatione repeti posse; investigabimusque, quis hoc sensu futurus sit combinationum numerus, si in illis etiam, ut anteà, attendatur ordinis varietas.

Sunto datæ res aut literæ quotlibet *a*, *b*, *c*, *d*, &c. quarum numerus sit *m*, patet illarum tot uniones posse accipi, quot sunt datæ res, putà *m*.

Applicetur iis prima litera *a*, præponendo illam singulis, ita: *aa*, *ab*, *ac*, *ad* &c. & habentur biniones, qui omnes incipiunt ab *a*, quorumque numerus æquari debet ipsi rerum numero *m*.

Deinde applicetur iisdem secunda *b*, præfigendo illam singulis. ut fiant *ba*, *bb*, *bc*, *bd* &c. qui omnes sunt biniones à *b* incipientes, quorum proinde numerus itidem ipsi *m* æquatur.

Simili ratione tertia *c*, & quarta *d*, cæteræque si plures fuerint, singulis datarum rerum semel præfigantur, & exurgent novi biniones, quorum nonnulli incipiunt à literâ *c*, alii à *d*, alii à cæterarum aliquâ; eorum verò numerus, qui ab eâdem literâ incipiunt, perpetuò ipsi *m* æquabitur. Quo pacto manifestum omnes in universum biniones repertos esse, eosque modis omnibus inter se transpositos; quorum proinde numerus toties superabit ipsum rerum numerum, quot sunt datæ res: quarum cùm hic sit *m*, binionum omnium numerus erit *mm*.

His verò binionibus si denuò applicare pergas datas res, unicuique illorum singulas has præponendo, formabis omnes ternionum ordines *aaa*, *aab*, *aac*, *aad*, *aba*, *abb*, &c. quorum qui ab eâdem literâ incipiunt semper tot existunt, quot sunt inventi biniones; omniumque proin numerus binionum numerum toties excedet quot fuerint datæ res, ac consequenter erit m^3.

Similiter si cunctis ternionibus identidem præfigi intelligantur singulæ literæ, elicientur omnes quaterniones possibiles, quorum per consequens numerus ternionum numerum rursus *m* vicibus superabit, eritque m^4. Atque

Atq; ita apparet, combinationum numerum secundùm quemcunque exponentem perpetuò *m* vicibus superandum esse à numero combinationum secundùm exponentem proximè sequentem: scilicet cùm numerus quaternionum sit m^4, erit quinionum numerus m^5, senionum m^6, & generaliter si exponens dicatur *n*, numerus combinationum secundùm hunc exponentem erit m^n. Unde expedita habetur

Regula

pro inveniendo numero combinationum modis omnibus permutatarum secundùm datum exponentem, cùm qualibet res etiam secum ipsa combinari potest.

DAtus rerum numerus elevetur ad eam potestatem, cujus index est datus combinationis exponens; & habetur quæsitum. Ex. gr. Omnes novem notarum numeralium quaternarii sumti & dispositi modis omnibus exhibent $9^4 \infty$ $9.9.9.9 \infty 6561$ variationes; totidem scil. numeros diversos, rejectis iis qui cyphram unam pluresvé includunt, inter 1000 & 10000 (limites eorum qui 4 characteribus scribuntur) interjici necesse est. Sic 4 vocales A. E. I. O, quibus quadruplex differentia propositionum secundùm quantitatem & qualitatem in Logicis innuitur, admittunt terniones $4^3 \infty 64$; unde totidem oriuntur modi syllogismi categorici boni malivé, non 36 tantùm ut voluit Aristoteles cum Interpretibus. Quòd si indefinitæ & singulares propositiones ab universalibus & particularibus distinguerentur, unde octuplex earum nasceretur discrimen, numerus modorum omninò ad 512, cubum nim. octonarii, assurgeret.

4. *Invenire numerum combinationum ejusmodi secundùm plures exponentes*

Quoniam ex iis quæ modò dicta sunt apparet, numerum unionum in datis rebus *m* esse *m*, binionum *mm*, ternionum m^3, quaternio-

ternionum m^4 &c. constat, numerum combinationum secundùm exponentes plures ab unitate naturali ordine se consequentes, quorum ultimus sit n, fore $m + mm + m^3 + m^4 \ldots + m^n$, summam scil. progressionis alicujus geometricæ secundùm rationem 1 ad m, cujus primus terminus est m, & ultimus m^n; quæque summa vulgò notâ methodo compendiosiùs exprimitur & unâ quantitate sic effertur: $\frac{m^n - 1 \text{ in } m}{m - 1}$, ita ut institutâ proportione $m - 1$ sit ad m, ut $m^n - 1$ ad quæsitum: unde sequens manat

Regula

pro inveniendo numero combinationum secundùm plures exponentes, quorum maximus est datus.

Fiat, ut rerum datarum numerus unitate truncatus ad eundem integrum; sic illius potestas, quam indicat exponentium maximus, unitate truncata ad numerum quartum, qui optatam combinationum multitudinem exhibebit. Ex. gr. ad indagandum, quot diversis modis inter se transponi possint 10 notæ numerales, si accipiantur tum singulæ, tum binæ, ternæ, quaternæ, quinæ & senæ: vel addi possunt sex primi termini progressionis geometricæ 10. 100. 1000. &c. vel, si videatur commodiùs, faciendum, ut 9 numerus notarum unitate minutus ad 10 eundem integrum, sic 999999 ejusdem potestas sexta sive quadrato-cubica unitate truncata ad quæsitum: utroque enim modo obtinetur 1111110 quæsita dispositionum multitudo.

Notandum verò, non omnes istas dispositiones efficere peculiares numeros; quotquot enim numeri à cyphris unâ pluribusvé incipiunt, non differunt ab iis, quos soli characteres reliqui neglectis cyphris constituerent: quocirca ut secernantur utiles à superfluis, considerandum, quòd ex decem notis solitariis unica est inutilis, ipsa scil. cyphra: ex numeris, qui duabus constant notis, redundant 10; quandoquidem o singulis decem notis semel præponi potest: ex iis qui scribuntur notis tribus, superflui sunt 100; ipsa enim o aut ter posita

posita est sola, aut bis præfixa singulis novem primis numeris, aut semel singulis inter 9 & 100 interceptis. Ita ex iis qui quatuor characteribus exprimuntur, supervacanei sunt 1000; singulis namque numeris, qui paucioribus notis scribuntur, quorumque si cyphram unà complectaris sunt manifestò mille, præfigi potest una alteravé cyphra, ut notarum quaternarius compleatur. Ob similem rationem ex iis, qui scribuntur notis quinque, eliminandi 10000, & 100000 ex iis qui constant notis sex: adeò ut, si à numero 1111110 ∞ 10 + 100 + 1000 + 10000 + 100000 + 1000000, seu summa sex terminorum progressionis decuplæ incipientis à 10, auferas 111111 ∞ 1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 + 100000 summam totidem terminorum ejusdem progressionis incipientis ab unitate (quod compendio fit, auferendo solummodò primum terminum hujus ab ultimo illius, cùm reliqui omnes se mutuo destruant) residuum 999999 indicet numerum omnium differentium ordinum, qui tribui possunt 10 notis numeralibus non ultra senas acceptis, ad exprimendum per illos totidem numeros diversos. Prout sanè evidens admodùm est, quòd ab unitate numerando ad usque 1000000, primum & minimum eorum numerorum qui septem notis constant, inveniuntur præcisè 999999 differentes numeri; cùm numerus 999999, eorum qui sex scribuntur notis maximus & ultimus, immediatè excipiatur à 1000000, ab eoque solâ unitate differat.

Non secus iniri potest numerus omnium combinationum ac permutationum 24 literarum Alphabeti, si fiat, ut 23 ad 24, sic vigesima quarta potestas numeri 24 (neglectâ unitatis ablatione, quâ in tam vasto numero non opus est) ad numerum quæsitum; qui per Logarithmos expeditè invenitur constare debere 34 notis, & superare 1391 quinti-milliones. Tantus vid. est numerus omnium vocum utilium & inutilium, quæ ex 24 Alphabeti literis modis omnibus formari possunt, saltem si illas non ultra vicenas quaternas combinari posse intelligas.

Notare hìc convenit peculiarem συμπάθειαν inter combinationes istas & potestates multinomiorum: Cùm enim ad inveniendum biniones omnes literarum *a*, *b*, *c*, *d*, singulæ cunctis sint præfigendæ, & ad inveniendum terniones omnes, cunctis binionibus singulæ lite-

ræ denuò applicandæ, & fic porrò, ut initio hujus capitis dictum; idemque etiam fieri foleat, ubi quantitas literalis $a+b+c+d$ ducenda eft in fe quadratè, cubicè &c. fequitur, easdem literas, fi fpectentur ut partes radicis alicujus multinomiæ, binionibus fuis exhibere omnia membra quadrati illius, ternionibus cubi, quaternionibus biquadrati &c. adeò ut membra poteftatis cujusvis aliter non exprimantur nifi per coacervationem combinationum partium radicis, factarum fecundùm exponentem æqualem poteftatis indici: hoc tantùm cum difcrimine, quòd omnia illa membra, quæ iisdem conftant literis variè tantùm transpofitis, cùm eandem quantitatem defignent, brevitatis ftudio in unum terminum conflari foleant, præfixo illi membrorum æquivalentium numero, qui coëfficiens termini vocari confuevit. Unde difcere proclive eft, quòd coëfficiens termini cujusvis exprimat numerum permutationum literarum illum terminum conftituentium, ipfa verò terminorum multitudo in quâvis poteftate æquetur numero combinationum, quæ inter partes radicis neglecto earum ordine fecundùm indicem poteftatis datæ inftitui poffunt, quarumque numerus per cap. 5tum invenitur.

Quod obfervaffe operæ pretium aliquando non exiguum erit, cùm exinde promtè definiri poffit tum multitudo terminorum, tum termini cujusvis coëfficiens in quâcunque poteftate. Ita, ex. gr. decima poteftas trinomii $a+b+c$, per reg. cap. 5ti conftabit terminis $\frac{11.12}{1.2} \infty 66$, quorum $a^5 b^3 cc$ per reg. 2 cap. 1mi coëfficientem habebit $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5 \text{ in } 1.2.3 \text{ in } 1.2} \infty 2520$. Pariter cubus radicis quadrimembris $a+b+c+d$ continebitur terminis $\frac{4.5.6}{1.2.3} \infty 20$, ejusq; termini aab & abc pro fuis coëfficientibus acquirent numeros 3 & 6.

CAP. IX.

Invenire numerum electionum rerum plurium, quarum nonnullæ funt eædem, nulla

verò

verò sæpiùs in electione assumi debet, quàm ipsa reperitur in toto rerum numero.

Hypothesis hæc est capitis sexti, nisi quòd ibi omnes diversi ordines unius combinationis pro unâ eâdemque electione, hîc pro totidem diversis electionibus habendi sunt. De Problemate hoc sensu accepto nihil definitum invenio apud Auctores; ego quæsitum sequenti modo exploro: Sunto ex. gr. combinandæ & permutandæ modis omnibus literæ a, b, c, eâ lege, ut in nullâ combinatione a sæpiùs quàm quater, b quam ter, & c quàm bis occurrat, hoc est, ut aliter enunciem, sint combinandæ & permutandæ omnifariam literæ $aaaabbbcc$ seu $a^4 b^3 c^2$, quarum 4 sunt eædem, item tres aliæ, & rursum duæ aliæ eædem, sitque determinandus numerus harum combinationum, tam secundùm singulos quàm secundùm omnes exponentes. Constat, ante omnia electiones solius a^4, incluso nullione quem unitatis notâ designamus, esse has quinque: 1, a, aa, a^3, a^4. Singulis harum applicetur litera b, primò semel, dein bis, tertiò ter, ut fiant novæ electiones: b, ab, aab, a^3b, a^4b: nec non, bb, abb, $aabb$, a^3bb, a^4bb: ut & b^3, ab^3, aab^3, a^3b^3, a^4b^3, planè ut factum cap. 6. Sed harum electionum illæ, quas b semel ingreditur, per reg. 2, cap. 1 ordine insuper recipiunt permutationes 1, 2, 3, 4, 5; prima vid. unam b, secunda duas ab & ba, tertia tres aab, aba, baa &c. Illæ verò, quas b ingreditur bis, ordine permutationes admittunt 1, 3, 6, 10, 15, juxta numeros scil. trigonales; prima nempe unam bb; secunda tres, abb, bab, bba; tertia sex, $aabb$, $abab$, $abba$, $baab$, $baba$, $bbaa$. &c. Et illæ, in quibus b ter occurrit, permutationes ordine capiunt 1, 4, 10, 20, 35, juxta numeros pyramidales: quemadmodùm etiam illæ, si quæ darentur electiones, in quibus b sæpiùs adhuc recurrit, permutationes admitterent juxta alios & alios figuratos gradatim altiores in infinitum. Hoc peracto, singulis præcedentium electionum permutationibus 1; a, b; aa, ab, ba, bb; a^3, aab, aba, baa, abb, bab, bba, b^3; &c. tertia porrò litera c nunc semel nunc bis adjungi intelligatur; ita novæ prodibunt electiones, c; ac, bc; aac, abc, bac, bbc; a^3c &c.

nec non, *cc*; *acc*, *bcc*; *aacc*, *abcc*, *bacc*, *bbcc*; a^3cc &c. quarum priores, quæ literam *c* semel tantùm includunt, respectu hujusce literæ, ordine reliquarum non immutato, subeunt permutationes 1, 2, 3, 4, &c. juxta numeros naturales; nempe unio *c* unam, singuli binionum *ac*, *bc* duas; singuli ternionum *aac*, *abc*, *bac*, *bbc*. tres, & ita porrò: posteriores verò, quæ lit. *c* bis continent, permutationes ordine patiuntur 1, 3, 6, 10 &c. secundùm trigonales; binio nempe *cc* unam, ternionum *acc*, *bcc* singuli tres; quaternionum *aacc*, *abcc*. *bacc*, *bbcc* singuli sex, & ita consequenter. Dico, ordine reliquarum præter *c* literarum non immutato; aliàs enim ex. gr. *abcc* non 6, sed 12 permutationes admittit, at quarum dimidia pars redundat, utpote sequenti quaternioni *bacc* attribuenda. Quòd si jam quarta adesset litera, ea similiter omnibus præcedentibus permutationibus secundùm singulas suas dimensiones foret applicanda, ad formandum novas electiones, quæ denuò permutationes reciperent secundùm numeros vel laterales, vel trigonales, vel pyramidales, &c. prout accedens litera vel semel, vel bis, vel ter iis adjuncta esset. Quo pacto nulla optatarum combinationum nos fugiet, neque etiam ulla bis computabitur. Ex dictis verò facilè perspicitur ratio constructionis sequentis Tabellæ, quâ numerum talium combinationum secundùm exponentes tam singulos quàm universos expeditè definio. Scribo ordine omnes exponentes combinationum, quas propositæ res $a^4b^3c^2$ suscipere possunt, à 0 usque ad 9; & sub eorum primis colloco tot unitates, quot prima litera habet dimensiones, & unam ampliùs, nempe quinque; quibus statim subjungo quinque numeros laterales 1, 2, 3, 4, 5; & his totidem trigonales 1, 3, 6, 10, 15, totidemque pyramidales 1, 4, 10, 20, 35; donec præter seriem unitatum tot habeam series, quot altera litera *b* habet dimensiones, easq; gradatim dextrorsum promoveo, ut factum cap. 6. Tum addo terminos, qui in eodem sibi gradu perpendiculariter respondent, ut fiant numeri 1, 2, 4, 8, 15 &c. Hos confestim duco in totidem laterales 1, 2, 3, 4 &c. & trigonales 1, 3, 6, 10 &c. singulos ordine multiplicando per singulos, ut præter seriem 1, 2, 4, 8 &c. tot aliæ prodeant numerorum series, 1, 4, 12, 32 &c. & 1, 6, 24, 80 &c. quot tertia litera *c* obtinet dimensiones, quas rursus gradatim dispono & addo, continuaturus eodem tenore ulteriùs, si plures literæ super-

pereſſent. Sic tandem ex ultimâ additione prodibunt numeri, qui multitudinem combinationum ſecundùm exponentes quiſque ſuos indicant, adeoque ſimul collecti numerum omnium ſimpliciter combinationum produnt:

Res Combinandæ.	*Exponentes Combinationum.*									
	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
a^4	1	1	1	1	1					
		1	2	3	4	5				
			1	3	6	10	15			
				1	4	10	20	35		
$a^4 b^3$	1	2	4	8	15	25	35	35		
		1	4	12	32	75	150	245	280	
			1	6	24	80	225	525	980	1260
$a^4 b^3 c^2$	1	3	9	26	71	180	410	805	1260	1260

Diſcimus ex hâc Tabellâ, quòd res propoſitæ $a^4 b^3 c^2$ contineant unum nullionem, tres uniones, 9 binarios, 26 ternarios, &c. tandemque 1260 novenarios, & quòd ſumma omnium abſolutè combinationum ſit 4025. Methodo huic ex abundanti fidem conciliabit ſequens laterculus, in quo primò adſcriptas vides omnes 60 rerum datarum electiones juxta hypotheſin capitis 6ti, & dein ad latus notatos numeros permutationum ſingulis competentes per regulam 2, capitis primi:

Elect.

Elect.	Permut.	
0	1	1
a	1	3
b	1	
c	1	
aa	1	9
ab	2	
ac	2	
bb	1	
bc	2	
cc	1	
a^3	1	26
aab	3	
aac	3	
abb	3	
abc	6	
acc	3	
b^3	1	
bbc	3	
bcc	3	

Elect.	Permut.	
a^4	1	71
a^3b	4	
a^3c	4	
aabb	6	
aabc	12	
aacc	6	
ab^3	4	
abbc	12	
abcc	12	
b^3c	4	
bbcc	6	
a^4b	5	180
a^4c	5	
a^3bb	10	
a^3bc	20	
a^3cc	10	
aab^3	10	
aabbc	30	
aabcc	30	
ab^3c	20	
abbcc	30	
b^3cc	10	

Elect.	Permut.	
a^4bb	15	410
a^4bc	30	
a^4cc	15	
a^3b^3	20	
a^3bbc	60	
a^3bcc	60	
aab^3c	60	
aabbcc	90	
ab^3cc	60	
a^4b^3	35	805
a^4bbc	105	
a^4bcc	105	
a^3b^3c	140	
a^3bbcc	210	
aab^3cc	210	
a^4b^3c	280	1260
a^4bbcc	420	
a^3b^3cc	560	
a^4b^3cc	1260	1260
Summa Permut.		4025

Colligitur hinc, quòd ex tribus diverſis notis numeralibus (non computato nullione, quo nulla earum accipitur) formari poſſunt 4024 diverſi numeri, in quorum nullo una notarum ſæpiùs quàm quater, altera quàm ter, & tertia quàm bis repetatur. Semper autem omnes notæ, quoties poſſunt, ſimul ſumtæ, hoc eſt, combinatæ ſecundùm exponentium maximum tot numeros ſuppeditant, quot numeros eædem exhibent combinatæ ſecundùm exponentem proximè minorem; quod Theorema notatu dignum.

Hæc ſunt, quæ de *Arte Combinatoriâ* dicere in præſens ſuſcepimus. Potuiſſemus quidem poſtremis hiſce capitibus, ubi in combinatio-

binationibus & ordo attenditur, & una eademque res eandem electionem sæpiùs ingredi posse concipitur, varias iterum quæstiones nobis enodandas proponere, & inquirere, in quot combinationibus una pluresvé res conjunctione vel divisim reperiantur, uti factum cap. 4to; aut, quot combinationes aliqua res semel, bis, ter, quater &c. posita ingrediatur; aut, quot sint illarum combinationum, in quibus nulla rerum datarum plus unâ, duabus, tribus &c. vicibus occurrit; aut in quibus designata quæpiam res primum, secundum, tertium &c. locum occupat, aliisve circumstantiis vestita apparet. Sed quia quæstiones ejusmodi in infinitum multiplicari possunt, malumus eas omnes hîc sicco pede præterire, & si quas earum deinceps ex usu nostro fore videbimus, earundem applicationem & enodationem in reliquas partes reservare, quàm ad particularia nonnulla hîc loci descendendo opus nunquam perficiendum aggredi. Hîc itaque secundæ Parti limites figimus, mox transituri ad cætera instituti nostri capita, usumque prolixum doctrinæ hujus de Combinationibus in Arte Conjectandi per plurima varii generis Problemata liquido ostensuri.

ARTIS CONJECTANDI PARS TERTIA,

explicans

Uſum præcedentis Doctrinæ in variis Sortitionibus & Ludis aleæ.

ABſolutâ in præcedente parte Operis, Permutationum & Combinationum Doctrinâ, ordo jubet, ut ejus Uſum ampliſſimum in definiendis Expectationibus Aleatorum per varias Sortitiones & Ludos aleæ hâc parte explicemus. Fundamentum generale hujus indaginis in eo conſiſtit, ut omnes permutationes vel combinationes quarum ſubjecta materia capax eſt, pro totidem habeantur caſibus æquè poſſibilibus, & ut diligenter attendatur, quot horum caſuum huic illive colluſori faveant vel adverſentur, è quo dein cætera per doctrinam primæ partis abſolvuntur. Cùm verò ſpecialis fundamenti applicatio non levem ſæpè induſtriam requirat, & exemplis meliùs quàm præceptis addiſcatur, nolo Lectorem prolixioribus prolegomenis detinere, ſed abſque morâ ad ipſam enodationem ſequentium Problematum

matum transeo, quæ nullo ferè habito selectu, prout in adversariis reperi, proponam, præmissis etiam vel interspersis nonnullis facilioribus, & in quibus nullus combinationum usus apparet.

PROBLEMA I.

Quidam duobus calculis albo nigroq; in urnâ reconditis præmium proponit tribus A, B, C, eâ lege, ut qui album extraxerit, præmio potiatur; si secùs omnes faxint, præmio quoq; careant. Primus autem extrahet ipse A, & reponet; secundùs B, tertius C. Quæruntur singulorum sortes?

Liquet, hunc casum tantùm specialem esse Problematis generalioris occasione Propos. XI. part. 1. pag. 34. soluti, quo plurium Aleatorum sortes exploravimus, qui æquali an inæquali, sortitionum à singulis continuò instituendarum numero aliquid præstare susceperunt; ubi sortem cujuslibet hâc generali formulâ expressimus: $\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}}$. Itaque cùm in præsenti exemplo lit. a (numerus omnium casuum) ob duos tantùm calculos valeat 2; c (numerus eorum, quibus præscriptum non impletur) ob unicum nigrum valeat 1; n ob unicam sortitionem à singulis instituendam itidem 1; s verò (numerus omnium sortitionum hanc præcedentium) pro primo A valeat 0, pro secundo B 1, pro tertio C 2; fiet (substitutis istis literarum valoribus) sors primi A $\frac{1}{2}$, secuudi B $\frac{1}{4}$, tertii C $\frac{1}{8}$; sic ut ipsi quoq; aleam proponenti relinquatur $\frac{1}{8}$ sui præmii.

PROBLEMA II.

Cæteris positis, ut prius, si aleæ Brabeuta omni jure in præmium se abdicare volens, jubeat reliquos tripartiri præmium inter se, si nullus eorum album calculum elegerit: Quæruntur tum eorum sortes?

Quia sic omne jus præmii in solidum transit in tres reliquos, perspicuum est, uniuscujusque expectationem meliorari $\frac{1}{24}$, hoc est, triente ejus. quod juxta præced. hypoth. soli Brabeutæ convenisset. Quocirca addito $\frac{1}{24}$ seorsim ad $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, & $\frac{1}{8}$, habetur expectatio primi $\frac{13}{24}$, secundi $\frac{7}{24}$, & tertii $\frac{4}{24}$.

PROBLEMA III.

Sex, A, B, C, D, E, F, jussu Principis, qui postremis magis favet quàm primis, aleâ periclitantur: primi duo A & B seorsim sortiri incipient; uter eorum vicerit, sortietur cum tertio C, uter horum superior evaserit, certabit cum D; & sic porrò usq; ad ultimum F; præmiumq; reportabit, qui post ultimum congressum victor supererit. Supponitur autem, binos quoscunq; æquâ sorte inter se certare, hoc est, neutrum altero potiorem ad vincendum expectationem habere. Quæruntur ipsorum sortes?

Primus

Primus A præmio potiri nequit, nisi omnium reliquorum quinque victor evadat, hoc est, nisi quinquies continuò vincat; uti & secundus B: sed nec tertius C palmam reportabit, nisi alterutrum præcedentium A & B, & omnes tres sequentes superet, hoc est, nisi quater continuò vincat, nec 4.tus D, nisi cum uno trium præcedentium ambos sequentes, hoc est, nisi ter continuò vincat, & similiter de reliquis. Unde constat, Problema hoc pro casu speciali habendum esse ejus, quo quæruntur expectationes collusorum, qui aliquot sortitionibus quidpiam aliquoties præstare suscipiunt; cujus solutionem ad Propos. XII part. I. pag. 38. tradidi, Tabellâ in eum usum supputatâ, juxta quam primi vel secundi sors erit $\frac{b5}{a5}$, tertii $\frac{b4}{a4}$, quarti $\frac{b3}{a3}$, quinti $\frac{bb}{aa}$, & sexti $\frac{b}{a}$, hoc est, (quia *a* ad *b* habet rationem duplam ob æqualem in quâvis sortitione numerum casuum ad vincendum & perdendum) sors primi vel secundi $\frac{1}{32}$, tertii $\frac{1}{16}$, quarti $\frac{1}{8}$, quinti $\frac{1}{4}$, & sexti $\frac{1}{2}$. Unde patet, exceptis duobus primis, qui æquali expectatione gaudent, quemlibet reliquorum proximè præcedenti duplo potiorem sortem nancisci; omnium verò expectationes exhaurire integrum præmium.

PROBLEMA IV.

Cæteris positis, ut priùs, si fingamus non æquam obtinere sortem in quâvis aleâ, sed unumquemq; cum secundo à se congredientem duplò, cum tertio 4plò, cum quarto 8plò &c. plures ad vincendum quàm perdendum casûs habere, exceptis tantùm duobus primis, quos æquo Marte certare ponimus: quæritur, an sic omnes sex æquale jus acquirant in

præmium propositum, compensatis per duplam proportionem casuum subduplis expectationibus præcedentis propositionis?

Hìc ob diversitatem sortium, quæ in diversis aleis regnat, calculus paulò intricatior: Consulatur Regula ad calcem Propos. XII part. I. pag. 44. & formula, quam suggerit, $\frac{beh\,\&c.}{adg\,\&c.}$ ubi literæ *beh* &c. numeros casuum ad vincendum, & *adg* &c. numeros omnium casuum in successivis aleis significant; exprimitur enim hâc formulâ expectatio aleatoris alicujus: qui aliquoties continuè vincere tenetur, quantumvis in diversis aleis non idem maneat casuum numerus, quibus vincat; uti in præced. Problemate. Patet autem, quantitatem hanc $\frac{beh\,\&c.}{adg\,\&c.} \infty \frac{b}{a}\cdot\frac{e}{d}\cdot\frac{h}{g}$ &c. hoc est, expectationem totalem, seu spem vincendi omnes aleas, multiplicatione conflatam esse ex sortibus particularibus, quas habet ad vincendum singulas. Conf. Coroll. I. Prop. 3 part. I. Quapropter ut Problematis nostri solutio methodica habeatur, investigandum successivè, quænam juxta hanc formulam primi A sit futura sors, si primò unum B, dein si duos B & C, hinc si tres, quatuor, ac denique omnes quinque reliquos vincere suscipiat; id enim omne prærequiritur ad indagandum sortes cæterorum. Est verò sors ipsius, cùm solum B vincere suscipit, $\frac{1}{2}$; cùm duos B & C vincere contendit, $\frac{1.2}{2.3} \infty \frac{1}{3}$; cùm tres B, C & D, $\frac{1.2.4}{2.3.5} \infty \frac{4}{15}$, &c. ut ex apposito laterculo apparet. Quod idem intelligendum de secundo B. Quod spectat tertium C, is cum alterutro præcedentium (quem in laterculis lit. P indigitamus) congredi tenebitur; utrumvis autem contingat, habet $\frac{1}{3}$ expectationis ad illum vincendum: quare si præter illum etiam sequentem D vincere suscipiat, habebit $\frac{1.2}{3.3} \infty \frac{2}{9}$; si verò & ipsum E, $\frac{1.2.4}{1.3.5} \infty \frac{8}{45}$. Similiter quarto D cum uno præcedentium P congrediendum erit: si cum C congrediatur, habet $\frac{1}{3}$ ad illum vincendum: si cum A vel B, habet $\frac{1}{5}$; sed æquè facile contingit, ut cum A vel B vel C congredi teneatur, quandoquidem omnes tres eandem habent expectationem ad

vin-

Sors ipsius ad vincendum	A	B
	$B \infty \frac{1}{2}$	$A \infty \frac{1}{2}$
	$B, C \infty \frac{1.2}{2.3} \infty \frac{1}{3}$	$A, C \infty \frac{1.2}{2.3} \infty \frac{1}{3}$
	$B, C, D \infty \frac{1.2.4}{2.3.5} \infty \frac{4}{15}$	$A, C, D \infty \frac{1.2.4}{2.3.5} \infty \frac{4}{15}$
	$B, C, D, E \infty \frac{1.2.4.8}{2.3.5.9} \infty \frac{32}{135}$	$A, C, D, E \infty \frac{1.2.4.8}{2.3.5.9} \infty \frac{32}{135}$
	$B, C, D, E, F \infty \frac{1.2.4.8.16}{2.3.5.9.17} \infty \frac{512}{2295}$	$A, C, D, E, F \infty \frac{1.2.4.4.16}{2.3.5.9.17} \infty \frac{512}{2295}$

Sors ipsius ad vincendum	C	D
	$P \infty \frac{1}{3}$	$P \infty \frac{11}{45}$
	$P, D \infty \frac{1.2}{3.3} \infty \frac{2}{9}$	$P, E \infty \frac{11.2}{45.3} \infty \frac{22}{135}$
	$P, D, E \infty \frac{1.2.4}{3.3.5} \infty \frac{8}{45}$	$P, E, F \; \frac{11.2.4}{45.3.5} \infty \frac{88}{675}$
	$P, D, E, F \infty \frac{1.2.4.8}{3.3.5.9} \infty \frac{64}{405}$	

Sors ipsius ad vincendum	E	F
	$P \infty \frac{5}{27}$	$P \infty \frac{181}{1275}$
	$P, F \infty \frac{5.2}{27.3} \infty \frac{10}{81}$	

vincendum continuè, quousque ordo certandi quartum D tangit; singuli nempe $\frac{1}{3}$, ut ex Tabulâ liquet: quocirca ipse D per Prop. 3. part. 1. habet $\frac{1.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{5}}{3} \infty \frac{11}{45}$ ad vincendum indefinitè unum trium præcedentium, quem ipsi fors objecerit; ideoque si præterea & quintum E vincere conetur, habere censebitur $\frac{11.2}{45.3} \infty \frac{22}{135}$ &c. Non secus quinti E & sexti F sortes explorantur, nisi quòd ipsos non æquè facilè cum unoquovis ex præcedentibus congredi contingit. Nam ex. gr. primus A habet $\frac{4}{15}$ ad vincendum continuè ipsos B, C, D,

juxta

juxta laterculum, tantundemque ſecundus B ad vincendum A, C, D, & tertius C habet $\frac{2}{9}$ ad vincendum P & D, & quartus D $\frac{11}{45}$ ad vincendum P, hoc eſt, reductis ad commune nomen fractionibus, A & B habent $\frac{12}{45}$, C $\frac{10}{45}$, & D $\frac{11}{45}$ ad vincendum continuè, quouſque ordo certandi quintum E poſtulat: quapropter 12 ſunt caſus, quibus ipſe E cum primo A, totidem quibus cum ſecundo B, 10 quibus cum tertio C, & 11 quibus cum 4to D committitur; unde per Prop. 3 part. 1 habet $\frac{24.\,{}^{1:9} + 10.\,{}^{1:5} + 11.\,{}^{1:3}}{45} \infty \frac{5}{27}$ expectationis ad vincendum indefinitè adverſarium, quem ipſi fors ex præcedentibus obtulerit. Et ſic in cæteris: Quòd ſi ubique ritè operatus fueris, deprehendes, expectationes totales aleatorum ſeu ſpes adimplendi omnes conditiones certaminis & reportandi præmium exprimi poſtremis laterculorum fractionibus $\frac{512}{2295}$, $\frac{512}{2295}$, $\frac{64}{405}$, $\frac{88}{675}$, $\frac{10}{81}$, $\frac{181}{1275}$, quæ ad idem nomen 34425 reductæ monſtrant, illas valdè diverſas eſſe & ſe habere ut 7680, 7680, 5440, 4488, 4250, 4887; & quia præcisè unum integrum exhauriunt, eo ipſo probitatem methodi & calculi confirmant.

PROBLEMA V.

A certat cum B, quòd ipſe ex 40 chartis luſoriis, id eſt, 10 cujusq; ſpeciei, 4 chartas extracturus ſit, ita ut ex unaquaq; ſpecie habeat unam. Quæritur ratio ſortium?

Problematis hujus in Appendice Problematum Hugenianorum ordine tertii ſolutionem jam parte primâ exhibuimus: nunc oſtendemus, quo pacto idem aliter, in auxilium vocatâ Combinationum doctrinâ confici poſſit.

Hunc in finem quæratur, quoties ex 40 chartis luſoriis quaternæ poſſint accipi, hoc eſt, quæratur numerus quaternionum in rebus 40. Inveniuntur autem per Cap. IV. part. 2. quaterniones iſti

isti $\frac{40.39.38.37}{1.2.3.4}$ ∞ 91390, habendi pro totidem aleæ casibus, qui omnes æquè facile evenire possunt. At horum casuum sunt 10000, qui Problematis conditionem implent, faciuntque ut ex unaquaque chartarum specie habeatur una, quod sic ostendi potest:

Pono pro 4 speciebus chartarum 4 tesseras, & pro 10 chartis cujusque speciei decem facies seu hedras in quaque tessera: sic totidem erunt diversi jactus in his tesseris, quot chartarum sunt quaterniones præscriptam conditionem adimplentes; sicut enim ad hanc implendam ex quavis specie necessariò una requiritur charta & non nisi una, ita in quovis tesserarum jactu singulæ tesseræ necessariò unam & non nisi unam faciem supernè ostentant. Sed ex iis quæ Hugenius ad Prop. X. part. 1. præfatur, colligi potest, quòd in 4 ejusmodi tesseris reperientur jactus 10. 10. 10. 10. ∞ 10000; cùm ergò totidem sint chartarum electiones ipsi A faventes, cæteræque 81390 contra certanti prosint, sequitur sortem A ad sortem B esse ut 10000 ad 81390, seu ut 1000 ad 8139.

PROBLEMA VI.

Assumtis 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis excmpturus sit, inter quos tres albi erunt. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B?

Problema hoc, quod in Appendice Problematum Hugenianorum est ordine quartum, in hanc Partem rejicere coacti fuimus, propterea quòd ejus solutio aliter quàm combinationum ope, quarum Doctrina secundâ demum Parte tradenda erat, difficulter investigari potuisset.

Constat primò, tot esse in universum aleæ propositæ casus, quoties ex 12 calculis septeni possunt eligi, nempe $\frac{12.11.10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5.6.7}$ ∞ 792.

∞ 792, per Cap. IV. part. 2. Deinde considerandum est, si quis quærat, quot horum casuum ipsi A faveant vel adversentur, hoc tantundem esse, acsi quærat, in quot septenariis ex designatis quatuor calculis tres qualescunque excluso quarto reperiantur; cujus Problematis solutionem sub finem dicti capitis ante appendicem hâc generali formâ expressimus $\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \ldots m-b+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots b}$ in $\frac{n-m \,.\, n-m-1 \,.\, n-m-2 \ldots n-m-c+b+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots c-b}$, significante literâ *n* numerum rerum combinandarum, *c* exponentem combinationis, *m* numerum rerum designatarum, *b* illarum ex designatis quæ combinationes optatas junctim ingredi debent: quare si interpreteris *n* per 12, *c* per 7, *m* per 4, & *b* per 3, habebis $\frac{4.3.2}{1.2.3}$ in $\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}$ ∞ 4.70 ∞ 280, numerum omnium septenariorum, quos singulos tres albi calculi excluso quarto ingrediuntur. Tot ergò casibus vincet A, reliquis 512 ipsi B profuturis, adeò ut sors illius sit ad sortem hujus, ut 280 ad 512, sive ut 35 ad 64; intellige si præcisè tres albos calculos nec plures nec pauciores eximere susceperit. Nam si tres albi eximendi de tribus *ad minimum* intelligantur, ita ut sensus Problematis sit, etiam tum lucraturum ipsum A, si plures tribus, h. e. omnes 4 albos elegerit, tum perspicuum est, numerum casuum quibus vincit A augendum esse toto illo electionum numero, quas omnes 4 albi calculi ingrediuntur; qui numerus per eandem regulam, positis tantùm *m* & *b* æqualibus seu verso valore ipsius *b* in 4, invenitur $\frac{8.7.6}{1.2.3}$ ∞ 56, cui additus præcedens 280 efficit 336, numerum electionum ipsi A faventium; & relinquuntur ipsi B duntaxat 456, sic ut eo casu sortes ipsorum sint ut 336 & 456, seu ut 14 & 19.

PROBLEMA VII.

Collusores aliquot A, B, C, &c. ex manipulo chartarum lusoriarum, quarum una icone

ne signata est, reliquæ iconismis vacua (cartes blanches) *folia ordine & alternatim eximunt, eâ conditione, ut qui signatum exemerit vincat. Tollet autem A primum, B secundum, C tertium, & sic usq; ad ultimum, post quem primus A tollere perget sequens folium, atq; ita porrò usque ad finem ludi. Quæritur ratio sortium?*

Patet, tot esse casus æquè faciles quot folia; cum folium iconismo signatum æquè facile vel primum, vel secundum vel tertium, vel deniq; ultimum locum obtinere possit: unde tot casus quisque habet ad vincendum quot ipsi folia contingunt; ac per consequens

Si omnibus collusoribus æqualis foliorum numerus contingit, quod fit cùm numerus collusorum est pars aliquota numeri chartarum, seu hic per illum exactè dividi potest, æqualis quoque omnium sors erit: Ita si numerus collusorum sit a, chartarum ma, unicuique obtingent m chartæ, quæ sortem illi pariunt $\frac{m}{ma} = \frac{1}{a}$, sic ut tum ordo eligendi nulli collusorum præjudicet.

Si verò non omnibus æqualis foliorum numerus obtingit, quod accidit ubi numerus chartarum per numerum collusorum exactè dividi nequit, putà si numero collusorum existente a, chartarum numerus est $ma + b$ (posito $b < a$) neque etiam sortes omnium æquales erunt. Tum enim unicuique primorum b collusorum cedent chartæ $m + 1$, unicuique autem reliquorum tantùm m: ac proinde sors unius ex illis erit ad sortem unius ex his, ut $m + 1$ ad m: Ex. gr. posito collusorum numero 10 & chartarum 64 seu $\overline{6 \text{ in } 10} + 4$; sors unius ex primis quatuor est ad sortem unius ex postremis sex, ut 7 ad 6.

PROBLEMA VIII.

Cæteris positis, ut priùs, si in manipulo chartarum plures iconismis signatæ existant, illeque vincere censendus sit, qui primam earum traxerit. Quæritur tum ratio sortium?

Hic sortes collusorum non ampliùs æquales sunt, sed quivis præcedentium unoquovis sequentium potiorem conditionem nanciscitur, sive eorum numerus numeri chartarum pars aliquota sit seu secus, ob rationem, quòd signatarum prima, à quâ solâ victoria dependet, faciliùs primum locum quàm secundum, & hunc faciliùs quàm tertium &c. occupare potest. Etenim quò anteriorem ista locum occupat, eò plura cæteris signatis post se loca occupanda relinquit. Ut verò determinemus numerum casuum, quibus unumquodq; fiat, sumamus ex. gr. chartas 12, interque illas 4 iconibus conspicuas, nam eadem operandi methodus ubique. Tum si prima charta icone signata primum locum occupet, reliquis tribus undecim patent loca reliqua; unde terna horum qualiacunque occupando tot casus diversos efficiunt, quot continentur ternarii in rebus undecim, nempe $\frac{11.10.9}{1.2.3}$ ∞ 165. Pariter si prima signata charta secundum locum teneat, reliquæ tres ex decem locis reliquis tria qualiacunque occupabunt; quod tot diversos casus præbet, quot ternarii comprehenduntur in rebus decem, vid. $\frac{10.9.8}{1.2.3}$ ∞ 120. Rursus, signatarum primâ tertium locum occupante, reliquis tantùm patent loca novem, unde tot casus emergunt, quot ternarii continentur in rebus 9: & sic ulteriùs juxta subjunctum laterculum, in quo prima series ordinem collusorum, si vis, trium A, B, C alternatim trahentium; secunda series loca foliorum; tertia numeros casuum, quibus primum folium signatum in loca respondentia incidere potest, exhibet. Hos casus deter-

determinant ipsissimi ternarii, quos ordine recipiunt res 11, 10, 9, &c. eosdem determinarent earundem binarii, si 3 tantùm folia signata ponerentur; & unitates, si duo.

Ordo Collus.	A.	B.	C.	A.	B.	C.	A.	B.	C.	A.	B.	C.
Loca foliorum	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Num. casuum	165.	120.	84.	56.	35.	20.	10.	4.	1.	0.	0.	0.

Omnes verò hi casus æquè facile evenire possunt, & summa eorum æqualis numero quaternionum in rebus 12 $\infty \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} \infty$ 495: quanquam enim singuli horum casuum ingentem numerum aliorum casuum secundariorum sub se comprehendunt: (eorum scil. qui ex solâ transpositione 4 foliorum signatorum inter se, & 8 non-signatorum inter se resultant) attamen hi casus secundarii magno compendio insuper haberi possunt, quòd tum ipsi æquè sunt proclives, tum idem ipsorum numerus (ob constantem foliorum 4 signatorum & 8 non-signatorum numerum) uni primario respondet: cuique videl. primario 1.2.3.4 in 1.2.3.4.5.6.7.8 ∞ 24 in 40320 ∞ 967680 secundarii, per Cap. I. part. 2. Et verò æqualis numerus casuum secundariorum æquè proclivium casum æquè proclivem primarium efficit, per Cor. 2. Prop. 3. part. 1.

Quibus ita ostensis, si sortes collusorum desideres, necesse tantùm habes addere in unam summam numeros casuum, locis illis respondentes, in quæ quisque collusor incidit. Atque sic reperitur numerus casuum ipsi A faventium 165 + 56 + 10 ∞ 231, ipsi B 120 + 35 + 4 ∞ 159, ipsi C 84 + 20 + 1 ∞ 105; unde ratio sortium fit. ut 231, 159, 105, sive ut 77, 53, 35. Notandum hoc Problema reâpse idem esse cum secundo Appendicis Hugenianæ part. 1. nomine tantùm calculorum in folia lusoria mutato: cujus proinde solutio quo pacto aliter quàm ibi haberi, & ex combinationum consideratione elici possit, nunc ostendimus. Paulò intricatius est hoc, quod sequitur.

PROBLEMA IX.

Cæteris positis, ut antea, si Collusores ita paciscantur inter se, ut vincat ille qui plures imagines traxerit; si verò duo pluresve æqualem acceperint imaginum numerum, æqualiter quoque depositum inter se partiantur, reliquis, quibus minor earum contigit numerus, nihil habentibus. Quæritur tum ratio sortium?

Si numerus collusorum est pars aliquota numeri chartarum, non opus est speciali determinatione casuum: sed absq; omni calculo constare potest, quantuscunque sit uterque & qualiscunque etiam imaginum numerus existat, sortes omnium collusorum inter se æquales esse debere; cùm enim iis omnibus æquè multa folia in partem cadant, & signatorum quodlibet ad quemlibet locum indifferenter se habeat, nulla ratio est, cur in æquali foliorum numero hic potiùs quàm ille majorem minoremve signatorum numerum expectet.

At si numerus chartarum numeri collusorum non sit exactè multiplex, aut etiam aliàs non æquè multa folia omnibus extrahenda concedantur, (quæ sive alternatim sive continuò extra hanc, perinde, cum circumstantia ordinis in extrahendo hîc nihil mutet) tum sortes eorum itidem sunt inæquales, eoq; difficiliùs reperiuntur, quo major tum collusorum tum signatorum foliorum numerus existit. Observo tamen, quòd si duo tantùm signata adsint, collusores verò quotcunque, sortes istæ semper sunt futuræ ut ipsi numeri foliorum, quæ quisq; extrahet; prorsus ut supra Probl. VII. in hypothesi unius folii sign. Ponatur enim numerus chartarum a, è quibus uni collusorum cedant b, alii c, tertio d chartæ, & consideretur, quòd in chartis b, quas primus

primus obtinet, signatarum vel altera, vel utraque, vel neutra reperiri possit. Si altera tantùm adsit, illa vel primum vel secundum vel tertium &c. locum in istis *b* chartis occupabit, intereà dum altera quoque promiscuè unumquemvis reliquorum $a-b$ locorum occupare potest; quod proin $b, a-b \propto ab-bb$ diversos casus suppeditat. Sin ambæ signatæ chartas primi ingrediantur, eæ vel primum & secundum, primum & tertium &c. item 2dum & 3tium &c. locum obtinebunt; unde tot casuum varietates emergunt, quot biniones in rebus *b* habentur, nempe $\frac{b.b-1}{1.2} \propto \frac{bb-b}{2}$: quemadmodum etiam ob eandem rationem universus numerus casuum æquatur numero binionum contentorum in universis *a* chartis, videl. $\frac{a.a-1}{1.2} \propto \frac{aa-a}{2}$: intellige, neglectis iis casibus secundariis, qui ex solâ utriusque signatæ inter se, & non-signatarum inter se permutatione oriuntur, utpote quorum numerus ob constantem signatarum & non-signatarum numerum perpetuò constans manet: quod mox infra quoque, ut & in sequenti Problemate & similibus exemplis semper subintelligendum est, etiamsi expresse non dicatur. Jam verò dictus collusor, cùm unam signatam obtinuerit, semissem depositi ex pacto consequetur; & cùm utramque, totum depositum: quapropter habet $ab-bb$ casus ad $\frac{1}{2}$, $\frac{bb-b}{2}$ casus ad 1, & cæteros, qui complent numerum $\frac{aa-a}{2}$, ad 0; id quod ei per Prop. 3. part. 1. sortem parit $\frac{b}{a}$. Eodem modo sors ejus, cui cedunt chartæ *c*, invenitur $\frac{c}{a}$; & ejus, cui *d* chartæ, $\frac{d}{a}$, &c. adeoque ratio sortium, ut *b*, *c*, *d*, numeri scil. chartarum, quas singuli accipiunt; quod ostendendum erat.

Extra verò hunc casum calculus paulò morosior evadit, & sæpè tædii plenissimus, præsertim in hypothesi signatarum chartarum & collusorum paulò plurium, ubi multiplex complexionum varietas difficulter sub regulâ generali cogi potest. Interim modus operandi semper idem, & in eo consistit, ut primò exploretur, quàm variè folia signata inter collusores distribui possint, hoc est, quot modis possibilibus numerus eorum dispesci queat in tot partes, quot sunt

ſunt colluſores, quarumque partium nulla numerum foliorum reſpe-ctivo colluſori cedentium ſuperet (quod eo ferè modo efficitur, quo ſupra part. 1. pag. 20. ad jactus punctorum in teſſeris inveſtigandos uſi fuimus, niſi quòd hîc ipſam quoque cyphram partibus accenſeamus; cùm utique fieri poſſit, ut unus alterve colluſorum nullum ex foliis ſignatis conſequatur): deinde ut ſupputetur, quot caſus ſingulis iſtis variationibus reſpondeant; quorum numerus initur ſumendo productum continuum combinationum ex rebus tot, quot quiſque chartas accipit, ſecundùm numerum ſignatarum iis permiſtarum ceu exponentem; veluti ſi ex chartis 40, quarum 10 ſunt ſignatæ, unus colluſorum eximere debeat 16, alius 10, tertius 8, & quartus 6; quæraturque quot caſibus contingere poſſit, ut ſimul inter chartas primi reperiantur ſignatæ 4, ſecundi 3, tertii 3, & quarti 0; multiplico numerum quaternionum in rebus 16, ternionum in 10, ternionum in 8, & nullionum in 6, in ſe invicem, & productum $\frac{16.15.14.13}{1.2.3.4}$ in $\frac{10.9.8}{1.2.3}$ in $\frac{8.7.6}{1.2.3}$ in 1 ∞ 1820.120.56.1 ∞ 12230400 quæſito ſatisfaciet; uti ex ſupra oſtenſis colligere facile eſt.

Quoniam autem in integri Problematis enodatione calculo nonnunquam contractiore uti licet, non abs re erit, rem totam ſpeciali aliquo exemplo declarare: Sunto chartæ 20 (quarum 10 ſignatæ) alternatim diſtribuendæ inter colluſores tres A, B, C, ſic ut primus conſequatur chartas 7, alter 7, & tertius tantùm 6; quærantùrque eorum expectationes. Liquet primò, fieri poſſe, ut in 7 chartis primi colluſoris vel nulla, vel una, vel duæ, 3, 4, 5, 6, vel denique 7 ſignatæ reperiantur; & ſi tantùm una vel 2 vel 3 ſignatæ adſint, eum infallibiliter perditurum; quandoquidem reliquorum alteruter neceſſariò plures tribus acquiret, & ſic ex pacto vincet: quare numerum horum caſuum inire ſuperſedeo, & ſtatim ſuppono, ipſi A 4 ſignatas obtingere; quo pacto uni reliquorum cedere poſſunt vel ſex ſignatæ reliquæ, vel 5, vel pauciores: ſed quoniam quatenus ei 5 vel 6 cedunt, cateaus perdere facient colluſorem A; idcirco & hos caſus ceu inutiles prætereo, & mox tranſeo ad ſignatas 4 & 3, tribuendo ipſi B 4 & C 2, vel B 2 & C 4, vel denique utrique 3. (quarum hypotheſium duæ priores colluſorem A ex ſemiſſe, tertia ex aſſe depo-

ſiti

siti possessorem reddunt) atque per doctrinam præced. reperio, casus esse 18:75 qui collusoribus A, B, C, signatas 4, 4, 2: casus 11025, qui iis 4, 2, 4 & casus 24500, qui 4, 3, 3, signatas advehunt. Deinde fingo collusori A obtingere signatas 5, sic reliquas 5 vel solus B vel solus C habebit; vel partem earum hic, partem ille accipiet: atq; idcircò 21 numerum quinionum in rebus 7, duco tum in 21 numerum totidem quinionum in aliis rebus 7, tum in 6 numerum quinionum in rebus 6, ad habendum casus 441 + 126 ∞ 567, qui singuli collusori A 5 signatas & alterutri reliquorum 5 reliquas afferunt, adeoque ipsi A semissem depositi lucrantur. Haud secùs etiam supputantur casus, quibus fieri potest, ut dum A 5 signatas obtinet, reliquorum uni obtingant 4 & alteri 1, vel uni 3 & alteri 2; sed non opus est isthuc descendere; possum enim collusores B & C sumere pro uno eodemque, & quæsitum absque distinctione casuum breviùs obtinere, si à 1287 numero quinionum in chartis 13, quas simul ambo reliqui consequuntur, subducantur præcedentes 21 + 6 ∞ 27 casus, quibus omnes 5 signatæ eorum alterutri obtingunt; ac residuum 1260 ducatur in 21 numerum quinionum in 7 chartis primi: sic enim prodeunt casus 26460, qui singuli collusori A integrum depositum acquirunt. Tandem etiam pono collusori A evenire signatas 6 vel 7, & quia nunc ultrà signatarum semissem habet, videò illum necessariò victorem evasurum, quomodocunque cæteræ 4 aut 3 signatæ inter collusores B & C distribuantur; quare neglecta & hic specialiore partitione, ipsisque B & C pro uno eodemque collusore habitis, sumo ex 13 eorum foliis omnes promiscuè quaterniones & terniones, eorùmque numerum per numerum senariorum & septenariorum in 7 chartis primi comprehensorum sigillatim multiplico, ut fiant 5005 + 286 ∞ 5291 novi casus, qui collusorem A totius depositi dominum faciunt, prout ex apposito laterculo apparet:

	A	B	C	Casus	ad
Charta universa	7	7	6		
signata	4	4	2	18375	$\frac{1}{2}$
	4	2	4	11025	$\frac{1}{2}$
	4	3	3	24500	1
	5	5	—	441	$\frac{1}{2}$
	5	—	5	126	$\frac{1}{2}$
	5	5		26460	1
	6	4		5005	1
	7	3		286	1

His peractis numeros casuum, quibus collusor A integro deposito potitur, in unam summam conjicio; nec non illos, quibus dimidium depositi acquirit, in aliam summam addo; tandemque etiam numerum omnium absolutè casuum, quos 10 signatæ in chartis 20 formare possunt, inquiro, qui est 184756: & sic reperio, illum habere 56251 casus ad 1, 29967 ad $\frac{1}{2}$, & reliquos ad 0; quod expectationem ipsi parit $\frac{142469}{369512}$; Et quia secundus B ex manipulo chartarum totidem, quot primus A nanciscitur, habebit & ipse $\frac{142469}{369512}$; unde tertio C relinquitur $\frac{84574}{369512}$, quæ portio etiam ab initio eodem modo computari potuisset. Erit igitur sors alterutrius ex duobus primis ad sortem tertii, ut 142469 ad 84574, major multò quàm 7 ad 6, qui sunt numeri foliorum quæ singulis ex manipulo debentur.

PROBLEMA X.

Quatuor Collusores A, B, C, D, eodem pacto quo in præced. inter se inito, ludunt 36 foliis, quorum 16 iconismis signata sunt, atque singulis singula folia ordine atque alternatim distribuunt. Accidit autem, ut distributis jam 23 foliis, ipsi A in sortem cesserint 4 imagines, ipsi B 3, C 2 & D 1, sic ut residua sint 13 folia, interque illa 6 signata. Quartus D (quem nunc ordo tangeret proximum acci-

piendi folium) videns sibi omnem ferè vincendi spem evanuisse, alteri cuidam jus suum vendere vult. Quæritur, quanti? & quæ singulorum expectationes?

Problema non differt à præcedenti, nisi quòd collusores jam aliquousque lusum prosecuti supponuntur. Quoniam residua ponimus 13 chartarum folia, quorum primum ipsi D destinatum, sequens ipsi A, tertium ipsi B, atque ita ordine ad ultimum usque, quod rursus ipsi D continget, sequitur, ipsum D 4 folia ex illis 13 accepturum, singulos verò reliquorum tria; adeoque D non plura signata quàm 4, nec singulos reliquorum plura quàm 3 (ultra illa quæ jam habere supponuntur) consequi posse. Quo observato dispiciendum, quot diversis modis residua 6 folia signata inter collusores distribui possint, sic ut ipsi D nunquam plura quàm 4, nec singulis reliqorum plura quàm tria obtingant: ac deinde supputandum, quot rursum casibus singulæ hæ mutationes sint obnoxiæ; prout hæc omnia in col. 1 subjunctæ tabellæ exhibentur. Fit autem operatio prorsus ut in præced. Probl. ut non opus sit ejus explicationi fusiùs inhærere. Solum hoc attendendum, quòd supputatis casibus, priusquam constare possit, quinam huic illive collusori faveant, numeri signatarum chartarum augendi sint illis signatis, quas singuli collusores (antequam D sortem suam vendidisset) habuerant; (quandoquidem ab utrisque conjunctim victoria dependet;) numerus scil. signatarum ipsius D augendus unitate, ipsius A quaternario, B ternario, & C binario; uti videre est in col. 2 tabellæ loco prioris surrogandâ. Tum verò colligendi sunt in unam summam omnes casus, quibus singuli collusores vel totum depositum, vel dimidiam, aut 3 aut 4^tam^ partem depositi auferunt, vel quibus omninò nihil impetrant: quo pacto invenietur A habere 1035 casus ad obtinendum 1, 399 casus ad $\frac{1}{2}$ &c. (ut seorsim in adjuncto tabellæ laterculo notatum cernis,) qui omnes collecti faciunt 1716, (quantus quoque præcisè est senariorum numerus in chartis 13.) Quocirca fiet sors ipsius A ∞

$\frac{1035.^{1} + 399.^{1:2} + 9.^{1:3} + 36.^{1:4} + 138.^{0}}{1716} \infty \frac{2493}{3432}$: & similiter ipsius B $\infty \frac{742}{3432}$; ipsius C $\infty \frac{134}{3432}$; ac tandem ipsius D $\infty \frac{63}{3432}$; sic ut ratio sortium sit, ut 2493, 742, 134, 63.

Notandum, quòd si chartæ residuæ non fuissent tam paucæ, neque numeri casuum inventu adeò faciles, operæ pretium fuisset, eodem quo in præced. Probl. compendio uti; præsertim si unius tantùm collusoris D quærenda expectatio fuisset: tum enim licuisset præterire omnes partitionum modos, qui ipsi non plures quàm duas, h.e. (cum eâ quam jam habere supponitur) quàm tres signatas attribuunt; & ex reliquis duntaxat illos paucos considerare, qui nulli cæterorum collusorum plures quàm huic signatas addicunt, quique in tabula lit. N notati conspiciuntur; cùm in cæteris signatarum partitionibus omnibus eum vi pacti toto deposito privari sit conspicuum. Nota denique idem fore genus Problematis, si loco chartarum lusoriarum alternatim accipiendarum calculi sive schedulæ aliæve res similes, quarum aliquæ sint signatæ, in loculo vel urna recondantur, atque ex iis collusores aliquot alii pauciores alii plures, sive simul & semel seu successivè, eximant, eâ conditione, ut ille vincere censendus sit, qui plures signatas exemerit. Supputandi enim ratio ubique eadem, neque (quod iteratò hîc moneo) circumstantia hæc de eximendis continuò vel alternatim calculis quicquam ad rem facit.

Colum.

Colum. 1. D. A. B. C.	Casus	Colum. 2. D. A. B. C
—. 3. 3. —	1	1. 7. 6. 2
—. 3. —. 3	1	1. 7. 3. 5
—. —. 3. 3	1	1. 4. 6. 5
—. 3. 2. 1	9	1. 7. 5. 3
—. 3. 1. 2	9	1. 7. 4. 4
—. 2. 3. 1	9	1. 6. 6. 3
—. 1. 3. 2	9	1. 5. 6. 4
—. 2. 1. 3	9	1. 6. 4. 5
—. 1. 2. 3	9	1. 5. 5. 5
—. 2. 2. 2	27	1. 6. 5. 4
1. 3. 2. —	12	2. 7. 5. 2
1. 3. —. 2	12	2. 7. 3. 4
1. 2. 3. —	12	2. 6. 6. 2
1. —. 3. 2	12	2. 4. 6. 4
1. 2. —. 3	12	2. 6. 3. 5
1. —. 2. 3	12	2. 4. 5. 5
1. 3. 1. 1	36	2. 7. 4. 3
1. 1. 3. 1	36	2. 5. 6. 3
1. 1. 1. 3	36	2. 5. 4. 5
1. 2. 2. 1	108	2. 6. 5. 3
1. 2. 1. 2	108	2. 6. 4. 4
1. 1. 2. 2	108	2. 5. 5. 4
2. 3. 1. —	18	3. 7. 4. 2
2. 3. —. 1	18	3. 7. 3. 3
2. 1. 3. —	18	3. 5. 6. 2
2. —. 3. 1	18	3. 4. 6. 3
2. 1. —. 3	18	3. 5. 3. 5
2. —. 1. 3	18	3. 4. 4. 5
2. 2. 2. —	54	3. 6. 5. 2
2. 2. —. 2	54	3. 6. 3. 4
2. —. 2. 2	54	3. 4. 5. 4
2. 2. 1. 1	162	3. 6. 4. 3
2. 1. 2. 1	162	3. 5. 5. 3
2. 1. 1. 2	162	3. 5. 4. 4

Colum. 1. D. A. B. C	Casus	Colum. 2. D. A. B. C	
3. 3. —. —	4	4. 7. 3. 2	
3. —. 3. —	4	4. 4. 6. 2	
3. —. —. 3	4	4. 4. 3. 5	
3. 2. 1. —	36	4. 6. 4. 2	
3. 2. —. 1	36	4. 6. 3. 3	
3. 1. 2. —	36	4. 5. 5. 2	
3. —. 2. 1	36	4. 4. 5. 3	
3. 1. —. 2	36	4. 5. 3. 4	
3. —. 1. 2	36	4. 4. 4. 4	N
3. 1. 1. 1	108	4. 5. 4. 3	
4. 2. —. —	3	5. 6. 3. 2	
4. —. 2. —	3	5. 4. 5. 2	N
4. —. —. 2	3	5. 4. 3. 4	N
4. 1. 1. —	9	5. 5. 4. 2	N
4. 1. —. 1	9	5. 5. 3. 3	N
4. —. 1. 1	9	5. 4. 4. 3	N

Summa, 1716 *Casus*.

Collusores	*Casus, quibus obtinent* A	B	C	D.
1	1035	188	22	12
$\frac{1}{2}$	399	342	66	21
$\frac{1}{3}$	9	9	9	—
$\frac{1}{4}$	36	36	36	36
0	237	1141	1583	1647
Summa Casuum	1716	1716	1716	1716

 PRO-

PROBLEMA XI.

Propositum sit, sex tesseræ jactibus sex ejus hedras jacere, singulas singulis, sic ut nulla hedrarum bis redeat. Quæritur expectatio ad hoc efficiendum?

Patet, singulos tesseræ jactus sex casibus subesse pro numero hedrarum. Harum nulla aleatori primo jactu contraria est; secundo jactu hedra primi jactûs ei est adversa, cæteris tantùm quinque faventibus. Tertio jactu hedræ duorum præcedentium jactuum ipsi nocent, faventque tantùm 4 reliquæ. Ita quarto jactu duntaxat ipsi prosunt hedræ 3, quinto tantùm duæ, & sexto unica. Problema igitur huc redit, ut inveniatur expectatio ejus, qui successivè sexies præstare debet aliquid, summa omnium casuum in singulis aleis existente 6, numero verò casuum ipsi faventium in primâ aleâ 6, in secundâ 5, in tertiâ 4, & sic porrò. Hæc ad Prop. XII. pr. part. generaliter inventa est $\frac{beh\,\&c.}{adg\,\&c.}$ ubi b, e, h &c. seorsim valent 6, 5, 4 &c. a, d, g &c. verò singulæ 6: unde $\frac{beh\,\&c.}{adg\,\&c.} \propto \frac{6.5.4.3.2.1}{6.6.6.6.6.6} \propto \frac{5.4.3.2.1}{6.6.6.6.6} \propto \frac{5}{324}$.

PROBLEMA XII.

Propositum sit, sex tesseræ jactibus sex hedras ordine *jacere, primo jactu unum punctum, secundo duo puncta, tertio tria &c. Quæritur expectatio ad hoc præstandum?*

Quia sex hedræ ordine jaciendæ sunt, aleator in singulis jactibus non nisi unum casum habet, qui sibi prodesse possit: unde cùm hic singulæ literarum b, e, h &c. valeant 1, erit expectatio quæsita $\frac{beh\,\&c.}{adg\,\&c.} \propto \frac{1.1.1.1.1.1}{6.6.6.6.6.6} \propto \frac{1}{46656}$.

PRO-

PROBLEMA XIII.

Tres collusores A, B, C, quorum singuli scriptas ante se habent sex primas notas numerales, alternatim tesserâ ludunt hâc conditione, ut quem quisque punctorum numerum jecerit, ex suis notis deleat; aut, si non habeat amplius, sequens ludere pergat, donec quis primus omnes sex notas deleverit. Contingit autem, ludo aliquandiu continuato, ut ipsi A restent adhuc notæ 2, ipsi B 4, & C 3; ordoque jaciendi tangat ipsum A. Quæruntur ipsorum sortes?

Problema hocce plus laboris & patientiæ quàm ingenii requirit: ob magnam enim casuum varietatem numeri protinus in immensum excrescunt; nec novi malo medelam, nisi putemus operationem aliquantulum contrahi posse, si ex sortibus aleatorum, quæ in singulos jactus mutantur, illas tantùm investigemus, quas post ternos quosque jactus acquirunt, cùm vices ludendi ad ipsum A redierint. Hunc in finem considero, quòd, dum collusores successivè tres jactus instituunt, fieri possit, ut vel nullus collusorum, vel unus, vel duo, vel omnes tres aliquam ex suis notis superstitibus jaciant: quot casibus autem unumquodque horum fiat, ex Reg. Pr. XII part. 1. subnexa perspicuum est, juxta quam (si numerum notarum superstitum pro ordine collusorum vocemus b, e, h, numerum deletarum c, f, i; summam utriusque $b+c$ vel $e+f$ vel $h+i \infty a \infty 6$ numero hedrarum unius tesseræ) numerus casuum, qui nulli collusorum delendam notam significant, eosque adeò in pristino statu relinquunt, invenitur cfi; eorum qui soli A, bfi; qui soli B, eci, &c. ut ex appo-

apposito laterculo apparet; numerus verò omnium casuum $a^3 \infty 6.6.6 \infty 216$, rejectisque per Cor. 4. Prop. 3. part. 1. iis, quibus collusorum sortes invariatæ manent, numerus cæterorum $a^3 - cfi$.

Null.	A	B	C	A&B	A&C	B&C	A, B&C.
cfi	*bfi*	*eci*	*hcf*	*bei*	*bbf*	*ebh*	*beh*.

Quibus præmissis sortes collusorum supputo ad omnes status, in quos ludum continuando pervenire possunt, incipiendo à simplicissimo, & pergendo ad omnes sequentes úsque ad statum propositum, ordine quem hîc subjungo; quandoquidem nullius sequentium sors haberi potest, quin sortes omnium præcedentium compertæ habeantur:

A	1.1.1	1.1.1	1.1.1	1.1.1	2.2.2	2.2.2	2.2.2	2.2.2
B	1.1.1	2.2.2	3.3.3	4.4.4	1.1.1	2.2.2	3.3.3	4.4.4
C	1.2.3	1.2.3	1.2.3	1.2.3	1.2.3	1.2.3	1.2.3	1.2.3

Primò pono, singulis collusorum unicam superesse notam, quo casu literæ b, e, h, singulæ valebunt 1, & singulæ c, f, i, 5; consideroque quòd primus A victoriâ potiatur, sive ipse solus, sive una cum alterutro vel utroque reliquorum, proximis tribus jactibus notam suam superstitem jecerit: sed quòd secundus B tum demùm vincere possit, cùm vel solus vel cum tertio C id præstiterit: tertius verò C non nisi cùm solus id effecerit; unde sortes ipsorum hæ fient: sors A $\infty \frac{bfi + bei + bbf + beh}{a^3 - cfi} \infty \frac{aab}{a^3 - cfi} \infty \frac{35}{91}$: sors B $\infty \frac{eci + ehc}{a^3 - cfi} \infty \frac{acc}{a^3 - cfi} \infty \frac{30}{91}$: sors C $\infty \frac{hcf}{a^3 - cfi} \infty \frac{25}{91}$.

Fingo deinde, singulis priorum duorum restare unam; & tertio C duas notas; quo pacto valor lit. h est 2, & i, 4: perpendoq; quòd in proximo jactuum ternario omnia eodem modo eveniant, sicut in præced. hypoth. excepto tantùm, cùm solus C notam suam superstitem jecerit: tum enim nemo adhuc vincit, sed omnes in eum statum perveniunt, qui in dictâ hyp. præced. suppositus fuit. Unde

fient

fient sortes, A $\infty \frac{aab.^{1} + bcf.^{36:91}}{a^3 - cfi} \infty \frac{36.^{1} + 50.^{36:91}}{116} \infty \frac{2538}{5278}$: B $\infty \frac{acc.^{1} + bcf.^{30:91}}{a^3 - cfi} \infty \frac{30.^{1} + 50.^{30:91}}{116} \infty \frac{2115}{5278}$: C $\infty \frac{bcf.^{25:91}}{a^3 - cfi} \infty \frac{50.^{25:91}}{116} \infty \frac{625}{5278}$.

Atque ita reliquorum etiam statuum sortes perquiri possunt. Sed calculus integer est hominis otio abundantis: nos occupatiores ad alia transimus.

PROBLEMA XIV.

Duo Collusores A & B, tessera in alveum projecta, conveniunt inter se, ut quot ejus puncta ceciderint, tot jactus uterque instituat, illeq; depositum auferat, qui plura summatim puncta jecerit; sin autem æqualis punctorum numerus ambobus contingat, æqualiter etiam depositum inter se partiantur. Mox verò collusorum alter B ludi pertæsus loco incertæ aleæ certum punctorum numerum assumere, & punctis 12 *pro rata sua acquiescere mavult. Annuit A. Quæritur uter altero, & quanto potiorem vincendi spem habeat?*

Determinandum ante omnia, an primus tesseræ jactus accenseri debeat jactibus collusoris A, necne. Ponamus primò non accenseri: idcirco

Si primo jactu unum punctum cadit, collusor A unum duntaxat jactum instituet, qui ad summum ipsi senarium adducere potest; unde cùm B ex pacto sumserit puncta 12, A necessariò perdet, nihilque depositi habebit.

Si primo jactu duo cadant puncta, A duos tesseræ jactus instituet, seu (quod per Annot. Prop. 12 pr. part. tantundem valet) duabus tesseris unum jactum: sed in duabus tesseris sunt casus 36, quorum unicus tantùm est punctorum 12, qui ipsi A ex pacto semissem depositi lucratur; cæteri omnes sunt pauciorum punctorum, quibus ille nihil acquirit; unde tum sors ejus est $\frac{1 \cdot 1{:}2 + 35 \cdot 0}{36} \infty \frac{1}{72}$.

Si primo jactu cadat ternarius, collusori A tres tesseræ jactus concedendi, seu (quod perinde) tribus tesseris jactus unus. Repe- riuntur autem in tribus tesseris casus 216, quorum 25 sunt duodecim, 135 pauciorum, & cæteri 56 plurium punctorum: unde habebit ex pacto 25 casus ad semissem depositi, 135 ad nihil, & 56 ad totum depositum; quod ipsi tunc valet $\frac{25 \cdot 1{:}2 + 135 \cdot 0 + 56 \cdot 1}{216} \infty \frac{137}{432}$.

Eodem pacto, si primo jactu quaternarius obtingat, sors collusoris A fiet $\frac{125 \cdot 1{:}2 + 310 \cdot 0 + 861 \cdot 1}{1296} \infty \frac{1847}{2592}$: & si quinarius, sors erit $\frac{305 \cdot 1{:}2 + 457 \cdot 0 + 7014 \cdot 1}{7776} \infty \frac{14333}{15552}$: si denique senarius, sors ejus prodibit $\frac{456 \cdot 1{:}2 + 462 \cdot 0 + 45738 \cdot 1}{46656} \infty \frac{7661}{7776}$.

Jam verò æquè facilè contingere potest, ut primo tesseræ jactu unum, duo, tria, 4, 5 vel 6 puncta cadant; idcirco sors collusoris A, quam ab initio ludi habet, per Prop. 2. pr. part. est sexta pars aggregati omnium sortium particularium $0, \frac{1}{72}, \frac{137}{432}, \frac{1847}{2592}, \frac{14333}{15552}, \frac{7661}{7776}$; videlicet $\frac{15295}{31104}$; & relinquitur pro sorte collusoris B, $\frac{15809}{31104}$.

Ponamus deinde, primum tesseræ jactum, qui numerum jactuum Collusoris A determinare debet, & ipsum his jactibus accensendum esse: quo posito, si prima vice unum punctum cadit, liquet A perditurum. Idem intellige, si duo puncta ceciderint; tum enim

ipsi

ipsi A unicus jactus restat, quo sex ad summum puncta jacere potest, quæ addita primi jactus binario non nisi 8 puncta efficiunt, cùm alteri B 12 concesserit.

Si prima vice tria jaciantur puncta, duo supersunt peragendi jactus à collusore A, quibus 36 casus respondent. Hos inter sunt 4, qui ipsi afferunt puncta 9 (h.e. connumerato primi jactus ternario, puncta 12) 26 casus, qui pauciora; & 6 qui plura. Habet ergo tum 4 casus ad $\frac{1}{2}$, 26 ad 0, & 6 ad 1; id quod ipsi sortem parit $\frac{2}{9}$.

Si primo jactu collusori A quaternarius obtingat, tres ipsi jactus insuper instituendi sunt, in quibus 216 casus reperiuntur. Horum sunt 21, qui ipsi adducunt puncta 8 (id est, si 4 primi jactus puncta accenseas, puncta 12) 35 casus, qui puncta pauciora, & 160 qui plura; unde sors collusoris A fiet $\frac{21\cdot\frac{1}{2}+35\cdot 0+160\cdot 1}{216} \infty \frac{341}{432}$.

Ad eundem modum reperitur sors ejus, si primo jactu quinarius evenerit, $\frac{1271}{1296}$; & ubi senarius, $\frac{15545}{15552}$.

Ergo, cùm primo jactu omnes sex hedræ unius tesseræ æquè sint in proclivi, sequitur, sortem collusoris A, quam ab initio ludi obtinet, fore sextam partem aggregati omnium sortium particularium 0, 0, $\frac{2}{9}$, $\frac{341}{432}$, $\frac{1271}{1296}$ & $\frac{15545}{15552}$, videl. $\frac{45529}{93312}$; sic ut collusori B relinquatur $\frac{47783}{93312}$, qui proinde in utraque hypothesi potiorem vincendi spem habet.

Ut Lectores nostri exemplo discant, quàm cautè in his ratiociniis sit versandum, ne quis nubem pro Junone captet; non abs re me facturum spero, si hîc subnectam specimen solutionis alicujus spuriæ atque fallacis ejusdem Problematis, quâ quærere quis posset valorem expectationis in ipsis punctis, & quam, priore solutione non cognitâ, legitimam & genuinam esse facilè juraret. Nimirum in 1. *hypoth.* si contingit, ut collusor A unicum jactum instituere debeat, illo jactu vel 1, vel 2, 3, 4, 5, vel deniq; 6 puncta impetrabit, quorum unumquodque eum pari facilitate accidere possit, valebit hoc ipsi per Prop. 2. part. 1. $\frac{1+2+3+4+5+6}{6} \infty 3\frac{1}{2}$ puncta, medium arithme-

 ticum

ticum inter 1 & 6. Sin ipso contingunt duo jactus instituendi, illis jactibus vel 2, 3, 4 &c. vel denique 12 puncta consequetur; & quia unus casus est, quo 2 puncta, & unus quo 12: duo verò casus quibus 3 & duo quibus 11: nec non tres casus quibus 4, & totidem quibus 10 puncta acquirit, & sic porrò; censebitur ejus expectatio, per Prop. 3. part. 1. punctorum $\frac{1.^{2}+1.^{12}+2.^{3}+2.^{11}+3.^{4}+3.^{10}+4.^{5}+4.^{9}+5.^{6}+5.^{8}+6.^{7}}{36} \infty \frac{1.^{2+12}+2.^{3+11}+3.^{4+10}+4.^{5+9}+5.^{6+8}+6.^{7}}{36} \infty \frac{1.^{14}+2.^{14}+3.^{14}+4.^{14}+5.^{14}+6.^{7}}{36} \infty \frac{15.^{14}+6.^{7}}{36} \infty \frac{18.^{14}}{36} \infty 7$, quòd medium quoq; arithmeticum est inter extrema puncta 2 & 12. Quòd si ipsum tres jactus instituere contingit, poterit illis jactibus impetrare 3, 4, 5 &c. usq; ad 18 puncta, quorum quæ ab extremis 3 & 18 æquè sunt remota, æquali semper casuum numero subjacent; unde eodem modo ostendetur, quòd ejus expectatio tum valeat puncta $10\frac{1}{2}$, medium itidem arithmeticum inter extrema 3 & 18. Pariter etiam, si 4, 5 aut 6 jactus ipsi peragendi sunt, ejus expectatio inter 4 & 24, inter 5 & 30, inter 6 & 36, qui sunt extremi numeri punctorum quæ 4, 5 & 6 tesseris evenire possunt, media erit, adeoque punctorum 14, $17\frac{1}{2}$ & 21. Quare cùm æquè facilè contingere possit, ut collusor A vel 1, vel 2. 3, 4, 5 aut 6 jactibus defungi teneatur, æquam etiam habebit expectationem ad puncta $3\frac{1}{2}$, 7, $10\frac{1}{2}$, 14, $17\frac{1}{2}$ & 21; qui numeri cùm & ipsi sint in arithmetica progressione, interque extremos medius existat $12\frac{1}{4}$, indicant expectationem hanc æstimandam esse $12\frac{1}{4}$ punctorum.

Haud absimili ratione in 2dâ *hypoth.* procedere licet: nam si collusor A prima vice unum jaciat punctum, habebit unum. Si duo jecerit puncta, habebit puncta 2, & præterea adhuc unum jactum, qui ipsi per ante dicta valet $3\frac{1}{2}$ puncta; adeoq; cum duobus illis habebit puncta $5\frac{1}{2}$. Si tria ipsi puncta ceciderint, habebit præter hæc 3 puncta duos jactus, quos ipsi valere diximus 7 puncta; proinde in totum habebit puncta 10. Non secus si 4, 5 aut 6 puncta primo jactu evenerint, ostendetur habere $14\frac{1}{2}$, 19 aut $23\frac{1}{2}$ puncta. Unde cùm initiò pari facilitate 1, 2, 3, 4, 5 aut 6 puncta jacere possit, æquam itidem

& (pro-

& (propter arithmeticam progressionem) mediam inter 1, $5\frac{1}{2}$, 10 $14\frac{1}{2}$, 19 & $23\frac{1}{2}$ puncta expectationem obtinebit; quæ quidem rursus est ut antea punctorum $12\frac{1}{4}$.

Itaq; cùm in utraq; hypothesi collusor A habere censeatur puncta $12\frac{1}{4}$, quorum alteri B tantum 12 concessa sunt, colligendum videtur, expectationem ipsius A potiorem esse quàm B. Hujus autem contrarium ex priore solutione, quæ sua luce radiat, apparet; quanquam profectò difficile dictu est, cur ille plura quàm hic puncta, minorem autem depositi partem expectet, cùm tamen acquisitio depositi vi pacti pendeat à punctorum pluralitate.

PROBLEMA XV.

Cæteris positis, ut ante, Collusor B pro rata sua quadratum numeri punctorum primi jactus concedi sibi postulat. Quæritur nunc ratio sortium?

Distinguantur rursus hypotheses:

1. *Hypoth.* Intelligatur jactus primus non accenseri jactibus collusoris A: Igitur si primo jactu unum punctum cadit, Collusori B ex pacto quoque tantùm unum tribuitur, dum alter A instituet unum jactum, è cujus 6 casibus unus est, qui unicum; & 5 qui plura ei puncta advehunt: adeoque 1 casus qui ipsum ex semisse, & 5 qui ipsum ex asse victorem reddunt; id quod sortem ei parit $\frac{1 \cdot 1:2 + 5 \cdot 1}{6} \infty \frac{11}{12}$.

Si primo jactu cadit binarius, ipse B ex pacto habebit bis duo seu 4 puncta, dum collusori A duo jactus concedendi: sunt autem in 2 jactibus 36 casus, interque illos tres punctorum tot quot habet B, nempe punctorum 4; ut & tres pauciorum punctorum, & 30 plurium: unde sors ipsius A fit $\frac{3 \cdot 1:2 + 3 \cdot 0 + 30 \cdot 1}{36} \infty \frac{7}{8}$.

Si primo jactu ternarius evenit, acquiruntur ipsi B ter tria seu 9 puncta, ipsique A 3 jactus, qui casus præbent 216. Hos inter sunt

25 pun-

25 punctorum novem (tot scil. quot habet B) 56 pauciorum & 135 plurium punctorum; quod sortem efficit $\frac{25 \cdot {}^{1:2} + 56 \cdot {}^{0} + 135 \cdot {}^{1}}{216}$ $\infty \frac{295}{432}$.

Simili discursu reperitur, si primo jactu quaternarius, quinarius vel senarius prodierit, sortem collusoris A fore $\frac{745}{2592}$, $\frac{7}{288}$, aut $\frac{1}{93312}$. Cùm igitur omnes 6 casus primi jactus sint æque proclives, sexta pars aggregati harum fractionum $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{295}{432}$, $\frac{745}{2592}$, $\frac{7}{288}$ & $\frac{1}{93312}$, nempe $\frac{259993}{559872}$ indicabit quæsitum; unde alteri B relinquitur $\frac{299879}{559872}$.

2. *Hypoth.* Sit nunc primus jactus & ipse computandus cum jactibus collusoris A: quo posito

Si unum prodeat punctum, liquet utrumque collusorum habere punctum, adeoque depositi semissem.

Si duo emergant puncta, habebit B ex pacto puncta 4, alterq; A præter jactum quo jam functus est adhuc alium instituet, è cujus 6 casibus unus est, qui 2 puncta (i. e. si primi jactus binarium unà computes, 4 puncta, tot scil. quot B habet) unus itidem casus qui pauciora, & 4 qui plura ipsi afferunt: unde sors ejus tunc erit $\frac{1 \cdot {}^{1:2} + 1 \cdot {}^{0} + 4 \cdot {}^{1}}{6} \infty \frac{3}{4}$.

Si tria jaciantur puncta, B puncta 9 habebit, A verò præcedenti jactui duos adhuc superaddet, qui 36 casibus sunt subjecti. Ex horum numero sunt 5 qui sex ipsi puncta producunt (h. e. comprehenso primi jactus ternario totidem, quot B habet) 10 casus qui pauciora, & 21 qui plura; id quod collusori A sortem progenerat $\frac{5 \cdot {}^{1:2} + 10 \cdot {}^{0} + 21 \cdot {}^{1}}{36} \infty \frac{47}{72}$.

Simili ratiocinio colliges, si primâ vice 4, 5 vel 6 puncta cadant, sortem collusoris A futuram $\frac{137}{432}$, $\frac{35}{864}$ vel $\frac{1}{15552}$. Ob sex igitur casus primi jactus æquè proclives, sexta pars aggregati omnium fractionum $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{47}{72}$, $\frac{137}{432}$, $\frac{35}{864}$ & $\frac{1}{15552}$, nempe $\frac{35155}{93312}$ ostendet quæsitum; ita ut collusori B relinquatur $\frac{58157}{93312}$, cui sic rursus in utraque hypothesi potior expectatio contingit.

PRO-

PROBLEMA XVI.

Æstimatio sortis in ludo, dicto Cinq & neuf.

In Gallia, Dania, Suecia, Belgio, inferiore Germania & locis finitimis aleæ quoddam genus in usu est, quod vocant *Cinq & neuf*, quodque inter duos collusores A & B duabus tesseris instituitur, ludendi vices perpetuas in se recipiente altero eorum A. Conditiones ludi sunt tales: Si A prima vice jaciat 3 vel 11, aut puncta duplicata quæcunque (*un doublet*, ein Pasch) putà duas unitates, duos binarios, ternarios &c. vincit ipse A: si jaciat 5 vel 9, vincit alter B, si alium quemvis punctorum jecerit numerum, putà 4, 6, 7, 8, vel 10 neuter eorum adhuc vicit, sed ludum prosequi tenentur, donec aut 5 vel 9 puncta ceciderint, quo casu ipse semper B victor erit; aut donec idem præcisè punctorum numerus, qui primo jactu prodiit, redierit; qui casus ipsum A victorem reddit: conditio enim de jaciendis punctis 3 vel 11, aut duplicatis quibusvis ipsi non nisi in primo jactu prodest. Quibus positis quæritur ratio sortium?

Quoniam collusor A, quatenus prima vice 4, 6, 7, 8 aut 10 puncta jacere potest, ad sortes pervenit etiamnum incognitas & inexploratas, hæ ante omnia veniunt investigandæ.

Ponamus itaque prima vice jecisse quaternarium, & nunc in procinctu esse alterum instituendi jactum. Quare cùm in duabus tesseris tres sint casus, qui eundem quaternarium revehunt, ipsumque A victorem ludi reddunt; & octo alii qui 5 vel 9 puncta afferunt, eique depositi jacturam causantur; dum cæteri omnes ipsum ad repetitionem jactus obligant, eoque non plus efficiunt per Cor. 4. Prop. 3. part. 1. quàm si prorsus abessent; idcirco fiet ejus expectatio $\frac{3 \cdot 1 + 8 \cdot 0}{11} \infty \frac{3}{11}$. Atque hæc quoque illi sors acquiritur, si primo jactu denarius ceciderit, cùm in duabus tesseris denario & quaternario æqualis casuum numerus respondeat.

Pona-

Ponamus deinde, primo jactu prodiiſſe ſenarium. Itaque cùm 5 caſus ſint, quibus altero jactu idem redire poteſt ſenarius, dum rurſus 8 aliis 5 vel 9 puncta obtingere poſſunt; ſequitur nunc colluſorem A 5 habere caſus pro ſe, & 8 contra ſe, (neglectis, ut antea, reliquis, qui ipſum in eodem ſtatu relinquunt) quod ſortem ei parit $\frac{5 \cdot 1 + 8 \cdot 0}{13} \infty \frac{5}{13}$. Quanta quoque illius expectatio eſt, ſi primo jactu octonarius evenerit; cùm ſenarius & octonarius eidem caſuum numero ſint obnoxii.

Ponamus denique, primo jactu cecidiſſe ſeptenarium. Unde cùm idem ſeptenarius ſequenti jactu ſex caſibus redire poſſit, erunt nunc 6 caſus, pro colluſore A, dum 8 ut antea ſunt pro adverſario; quod ſortem ipſius A efficit $\frac{6 \cdot 1 + 8 \cdot 0}{14} \infty \frac{3}{7}$.

His ita inventis pergo in Problemate, conſiderando ſtatum colluſoris A ante primum jactum, & examinando quot ille caſibus per jactum hunc ad unamquamque præcedentium ſortium pervenire poſſit: Primò conſtat, in teſſeris duabus ſex eſſe caſus punctorum duplicatorum quorumque, ut & quatuor alios punctorum trium vel undecim, adeoque 10 in univerſum caſus, qui colluſorem A ex ludi præſcripto totius depoſiti dominum reddunt. Deinde etiam liquet, ut jam inſinuatum eſt, 8 eſſe caſus punctorum quinque vel novem, quibus ille contra toto depoſito excidit. Præterea numerantur 6 caſus quatuor ſimul & decem punctorum, ſed comprehenſi in iis ambo caſus duplicati binarii & quinarii, quibus colluſor A toto depoſito potitur, quorumque ratio jam habita eſt; his igitur ſubtractis remanent tantùm 4, qui ipſum ad ſortem ſupra inventam $\frac{3}{11}$ perducunt. Porrò habentur caſus 10 pro ſex & octo punctis, unde demtis iterum duobus pro duplicato ternario & quaternario, relinquuntur 8, qui illum ad ſortem ſupra repertam $\frac{5}{13}$ promovent. Tandem reliqui ſunt 6 caſus ad puncta ſeptem, quibus ſupra oſtendimus ipſi ſortem acquiri $\frac{3}{7}$. Omnibus igitur in compendium redactis, clarum eſt, expectationem Aleatoris A, quam ab initio ludi habet, fore $\frac{10 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 3:11 + 8 \cdot 5:13 + 6 \cdot 3:7}{36} \infty \frac{4182}{9009}$, ac proinde col-

luſoris

lusoris B $\frac{4820}{9009}$, sic ut ratio sortium sit, ut 4189 ad 4820. Unde perspicuum fit, potiorem hujus quàm illius conditionem esse, ut maximè sint qui secus existiment. inque partes ipsius A transire malint.

PROBLEMA XVII.

Æstimatio sortis in alio quodam Aleæ genere.

Memini me olim tempore nundinarum quendam hic vidisse Circulatorem, qui sequens aleæ genus in foro exponebat, eoque prætereuntes alliciebat. Discus erat orbicularis ad libellam compositus, versùs medium parumper acclivis; Limbum circumcingebant 32 loculi seu foraminula contigua & æqualia, quæ in quatuor distincta classes vel series numeris ordine ab I usque ad VIII quater adscriptis signabantur; Medio disci perpendiculariter imminebat fritillus. Fortunam periclitaturus per cavitatem fritilli quatuor demittebat globulos excipiendos in circumferentia disci à totidem loculis, auferebatque præmium quod numeris horum loculorum in summam collectis dicatum conspiciebat, majoris minorisve pretii pro aggregati diversitate, ut ex subjuncto laterculo apparet. Singuli autem globulorum jactus ipsi quaternis nummis redimendi erant. Quæritur ipsius expectatio?

Constat primò, quòd unoquovis globulorum jactu ad minimum 4, ad summum 32 puncta obtineri possunt, quorum utrumvis uno duntaxat casu contingit, illud, si globuli singuli singulorum ordinum prima foramina subintrant, istud si ultima. Deinde observo, quòd casus multiplicentur pro intermediis punctorum numeris, prout ab utrovis extremo 4 aut 32 magis recedunt, & quòd maximo casuum numero sit expositus numerus 18, medius arithmeticus inter 4 & 32; bini autem numeri à medio 18 supra infraque æqualiter remoti æquali quoque casuum numero subsint. Tertiò considero, quòd foraminula, quæ quovis jactu globulos excipiunt, vel omnia quatuor signata esse possint eodem determinato numero; vel tria eodem, quar-

Puncta		Nummi		Casus communes.
4	32	120	180	1
5	31	100	32	16
6	30	30	25	52
7	29	24	24	128
8	28	18	16	245
9	27	10	12	416
10	26	6	8	664
11	25	6	6	976
12	24	6	4	1369
13	23	5	4	1776
14	22	3	3	2204
15	21	3	3	2560
16	20	3	3	2893
17	19	2	3	3088
18		2		3184

tum diverſo: vel duo eodem, & reliqua duo alio eodem numero: vel duo eodem, & cætera duo diverſis: vel denique omnia quatuor differentibus determinatis numeris; quorum quidem primum unico, alterum 16, tertium 36, quartum 96, ultimum 256 caſibus accidere poteſt. Etenim cùm quaterni ſint loculi homologi, ſive eodem determinato numero putà I notati, ſi globulorum nonnulli putà tres ab iſtis loculis ſunt excipiendi, liquet hoc tot caſibus contingere poſſe, quot terniones in rebus 4 continentur, nempe quatuor; adeò ut si quartus inſuper globulus in aliquem loculum alio numero, ex. gr. II. ſignatum ſe recipere debeat (quod ob quatuor uniones in rebus 4 rurſum quatuor caſibus evenit) concludi poſſit, quater quatuor ſeu 16 in univerſum caſus exiſtere, qui efficiant, ut tres globuli tres loculos n. I ſignatos & ſimul quartus unum loculorum n.° II notatorum ſubintret. Quemadmodum etiam colligere promtum eſt, ob ſex biniones rerum quatuor, ſexies ſex ſeu 36 caſus haberi, quibus contingat, ut duo loculi n.° I conſpicui à duobus, & duo n.° II notati ab aliis duobus globulis occupentur: nec non ſexies quater quatuor, h.e. 96 caſus, quibus duo loculi num. I à duobus, unus loculorum n.° II à tertio, & unus n.° III à 4.to globulo occupetur: ac denique 4.4.4.4 h.e. 256 caſus, quibus unus globulorum in loculum n. I, alius in loculum n.° II, tertius in loculum III, & quartus in IV ſe recipiat. Ubi tandem notandum, quod ad variationes illas 24, quæ ex ſolâ 4 globulorum permutatione mutuâ oriuntur, non attendamus, quippe quæ inſuper haberi poſſunt ceu totidem caſus ſecundarii, ex quibus unusquiſque primariorum conflatur.

His

His ita præmissis & intellectis inquirendum est in numerum casuum cuivis punctorum numero convenientem, eo ferè modo quo supra post Prop. 9. part. 1. ad numeros jactuum in tesseris investigandos usi fuimus; resolvendo vid. propositum punctorum numerum ob 4 globulos in 4 partes, quarum nulla octonarium superet (quòd loculis majores numeri non sint adscripti) idque omnibus modis possibilibus, ac deinde singulis modis juxta supra observata suos tribuendo casuum numeros; horum enim summa quæsitum exhibebit. At quoniam eâ ratione numerus casuum duntaxat pro dato punctorum numero inveniretur, nobis verò casuum notitia pro universis punctis necessaria est, poterimus aliam compendiosiorem inire viam, & omnia una operatione consequi, hoc modo:

In supremo sequentis Tabulæ margine scribantur ordine numeri punctorum à IV usque ad XVIII; sufficit enim horum determinasse casus, cùm singuli supra XVIII cum singulis infra in casuum multitudine, uti dictum, conveniant.

Ponamus, globulos omnes excipi 4 loculis homologis, erunt eorum numeri vel 4 unitates, vel 4 binarii, ternarii, quaternarii &c. quorum summæ sunt, 4, 8, 12, 16, &c. quare signetur in margine sinistro 1. 1. 1. 1 (cæteris 2. 2. 2. 2 &c. usq; ad 8. 8. 8. 8 mente subintellectis) & è regione sub singulis punctorum numeris IV. VIII. XII. XVI. &c. notentur singulæ unitates.

Ponamus tres globulos excipi loculis homologis, quartum diverso: erunt homologorum numeri vel tres unitates, vel totidem binarii, ternarii &c. Si tres unitates, quartus numerus erit vel binarius, vel ternarius, quaternarius &c. qui singuli juncti unitatibus summas efficiunt V. VI. VII. VIII.... XI; quocirca in margine signetur 1. 1. 1. 2 (reliquis 1. 1. 1. 3 &c. usque ad 1. 1. 1. 8 mente suppletis) & è regione sub punctis V. VI. VII... XI. scribatur 16. Si homologorum numeri sint tres binarii, quartus erit vel 1, vel 3, vel 4 &c. qui juncti binariis summas exhibent VII. IX. X... XIV; quare in margine ponatur 2. 2. 2. 1 (cæteris 2. 2. 2. 3 &c. subintellectis) & è regione sub singulis punctorum VII. IX. X.... XIV. rursus scribatur 16. Similiter etiam procedendum, ubi homologorum numeri sunt tres ternarii, existente quarto 1. 2. 4 aut 5 &c. aut

tres quaternarii, existente quarto 1. 2. 3. aut 5 &c. aut tres quinarii &c. existente semper quarto uno reliquorum, scribendo nempe 16 sub singulis punctorum summis, quas additi 4 loculorum numeri efficiunt.

Ponamus porrò loculos globulorum duos homologos, & alios duos rursus homologos, sed à prioribus diversos: erunt numeri loculorum vel duæ unitates cum duobus binariis, ternariis, quaternariis &c. qui unitatibus juncti faciunt VI. VIII. X.... XVIII: vel duo binarii cum 2 ternariis, quaternariis &c. qui additi binariis constituunt X. XII. XIV. &c. vel duo ternarii cum totidem quaternariis &c. vel duo quaternarii cum totidem quinariis &c. &c. idcirco notentur in margine Tabulæ 1. 1. 2. 2, 2. 2. 3. 3, 3. 3. 4. 4 &c. (cæteris 1. 1. 3. 3, 1. 1. 4. 4 &c. nec non 2. 2. 4. 4 &c. 3. 3. 5. 5 &c. compendii gratiâ omissis) è regione verò sub singulis numerorum tam expressorum quàm mente retentorum summis scribantur 36.

Pergamus deinde ponere loculos globulorum duos homologos, reliquos ab his & inter se diversos: erunt homologorum numeri rursus vel duæ unitates, vel duo binarii, ternarii &c. & si unitates, tertius erit vel binarius cum quarto ternario, quaternario, quinario &c. vel ternarius cum quarto quaternario, quinario &c. & ita consequenter: si duo binarii, tertius esse potest vel 1 cum quarto 3, 4, 5, 6 &c. vel 3 cum 4to 4, 5, 6 &c. vel 4 cum 4to 5, 6 &c. &c. si illi sunt duo ternarii, tertius existet vel 1 cum 4to 2, 4, 5, 6 &c. vel 2 cum 4to 4, 5, 6 &c. vel 4 cum 4.^{o} 5, 6 &c. &c. si illi sunt quaternarii, 3^{tius} poterit esse vel 1 cum 4to 2, 3, 5 &c. vel 2 cum 4to 3, 5 &c. &c. & ita pariter in reliquis omnibus, quamobrem primis harum combinationum 1. 1. 2. 3, 1. 1. 3. 4, &c. nec non 2. 2. 1. 3 &c. 3. 3. 1. 2 &c. in margine notatis & cæteris mente suppletis, scribantur sub singulis punctorum summis, quas singuli numerorum quaternarii efficiunt, 96.

Tandem etiam ponamus, loculos globulorum omnes differentibus numeris affectos esse; erunt ipsorum combinationes tales: 1.2.3 cum 4to 4, 5, 6 &c. 1. 2. 4 cum 4to 5, 6, 7 &c. &c. item 1. 3. 4:

1.3.5:

Combinat.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
1.1.1.1.	1	.	.	.	1	.
1.1.1.2	.	16	16	16	16	16
2.2.2.1	.	.	.	16	.	16

1.3.5: &c. 1.4.5 &c. cum 4^to &c. nec non 2.3.4: 2.3.5 &c. cum quarto differenti numero &c. &c. &c. usque ad 3.4.5.6 quà cum omnes possibiles combinationes sunt completæ: quocirca primis harum combinationum in margine expressis & prætermissis reliquis, notentur è regione sub singulis quaternorum numerorum summis, 256; prout hæc omnia in adjunctâ Tabulâ præstita cernuntur.

Additis igitur in unam summam, qui in eâdem serie perpendiculari sibi respondent, numeris, habebuntur omnes punctorum in vertice scriptorum casus, videl. 1 casus pro punctis IV, 16 casus pro punctis V, 52 pro punctis VI; & ita deinceps usque ad puncta XVIII, qui numerus bis 16, quater 36, decies 96 & octies 256, id est, in universum 3184 casibus expositus est. Et quoniam numeri punctorum supra XVIII cum reliquis infra, singuli cum singulis, putà XIX cum XVII, XX cum XVI &c. in numero casuum conveniunt, ut initio monuimus & ostensu facile est, sequitur, si collecti à punctis IV ad XVII casuum numeri duplentur, duploque 32776 addantur 3184 casus punctorum XVIII, aggregatum 35960 exhibiturum summam omnium omnino casuum. Quòd autem enumeratio ritè facta sit, nullaque combinationum prætermissa, vel inde patet, quòd numerus quaternionum in rebus (putà loculis) 32, præcisè idem reperitur; est enim ille, per Cap. 4. part. 2, $\frac{32.31.30.29}{1.2.3.4} \infty 35960$.

Inventis sic numeris casuum pro quovis punctorum numero, cætera oppidò levia sunt, & expediuntur per Prop. 3. part. 1. multiplicando videl. singulos casuum numeros per singula præmia, quæ istis casibus acquiruntur: nempe (cùm punctis IV in sup. laterculo tribuantur nummi 120, punctis XXXII nummi 180, punctis V nummi 100, punctis XXXI nummi 32, punctis VI 30, punctis XXX 25 &c.) multiplicando 1 casum per 120, rursusque per 180; 16 casus per 100, iterumque per 32; 52 casus per 30, nec non per 25 &c. sive brevius, 1 per 300 ∞ 120 + 180, 16 per 132 ∞ 100 + 32, 52 per 55 ∞ 30 + 25, atque ita deinceps usque ad 3184 per 2: ac tandem dividendo omnium produ-

ctorum summam per summam omnium casuum 35960. Sic enim exibunt in quotiente pro expectatione aleatoris nummi $4\frac{340}{556}$: unde cùm ipse ex hypoth. solis 4 nummis jactum redemerit, apparet potiorem illius quàm circulatoris sortem esse, istumque proin hoc aleæ genere, ni præmia minuat, non multum lucrari posse.

PROBLEMA XVIII.

De Ludo chartarum, vulgò Trijaques.

Usitatissimum est inter Germanos ludi genus, quod *Trijaques* appellatur, & affinitatem quandam habet cum Gallorum *Brelan*: Sumuntur ex Ludo chartarum folia 24 (rejectis cæteris) ex unaquaque scil. specie sex; nimirum *Novenarii*, *Denarii*, *Famuli*, *Heræ*, *Reges* & *Monades*, quæ suis posthac literis initialibus N. D. F. H. R. M denotabuntur, & hunc dignitatis ordinem inter se servant: Primas tenet *Monas*, sequitur *Rex*, inde *Hera*, *Famulus*, *Denarius*; sed omnibus supereminent *Novenarii* unà cum *Famulo trifolii* (quem proin etiam Novenariis accensemus, sic ut 5 habeamus Novenarios, at 3 tantùm Famnlos). Novenariorum præstantia, similis ferè horum, quos in ludo Hispanico *Jeu de l'Hombre* dicto *Matadors*, latrones, homicidas sive sicarios appellant, in eo consistit, ut cujusvis dignitatis & speciei chartis accenseantur: sic duo Novenarii cum Monade, aut unus cum duabus juncti tres Monadas, seu *Trigam (un Tricon)* Monadum efficiunt: unus, duo vel tres Novenarii stipati tribus, duobus unove Regibus *Quadrigam* Regum constituunt: unus duove Novenarii in consortio trium duorumve ejusdem speciei foliorum, quaterna illius speciei exhibent, ex. gr. quaterna corda, spicula, trifolia &c. cujusmodi chartarum complexio *Fluvius*, ein Fluß/ dici consuevit, qui præterea numero punctorum æstimatur; numerantur autem pro Novenario aut Monade puncta 11, pro cæterarum dignitatum chartis singulis puncta 10. Modus ludendi talis:

Singulis colludentium ordine bina distribuuntur folia, quibus clam inspectis liberum est primo arbitrariam pecuniæ summam deponere, quocum si congredi velit alter, tantundem deponet, aut etiam

etiam, ubi visum fuerit, insuper adjiciet aliquid; quod pariter prior superaddere tenetur, si depositi sui jacturam facere nolit. Quo facto singulis, qui ludum ingressi sunt, bina rursum folia exhibentur, sed omnium palàm oculis in mensâ exposita; sic ut cujusque collusoris ludus cæteris ex parte detectus, ex parte occultus sit: tum verò de novo pecuniâ certare incipiunt, aucto, ut antea, alternis deposito, provocatoque pluris semper licitandi potestate concessâ. Tandem aperit unusquisque ludum suum collusoribus, & qui cæteris potiorem habere deprehenditur, universo deposito potitur. Potior autem est Quadriga Fluvio, & Fluvius Triga, quibus omnibus præfertur Quadriga Novenariorum. In Trigis & Quadrigis cæteris dignitatis ordo, in Fluviis punctorum numerus attenditur; sic Triga vel Quadriga Monadum prævalet Trigæ vel Quadrigæ Regum, & Fluvius 43 punctorum alium 42 antecellit. Si nemo collusorum Triga, Quadriga Fluviove sit instructus, is qui plura ejusdem speciei puncta numerare potest, deposito potitur. In casu verò omnimodæ paritatis ludorum, ut cùm duo ejusdem dignitatis Trigam aut Quadrigam, vel totidem punctorum Fluvium numerant, is alteri victoriam præripit, qui ordine prior est, seu qui primus chartas accepit.

Quibus suppositis & intellectis poterit quilibet collusorum visis primis suis duobus foliis calculo subducere, quæ sibi sit expectatio ad vincendum, indeque colligere, quis in certando modus sit tenendus: quanquam enim licitationem non semper qualitati ludi proportionare debeat, ne collusoribus ludum suum prodat (quandoquidem anima hujus ludi est simulatio, & hîc præcipuè in usum vertendum, quod Galli vocant, *faire bonne mine à mauvais jeu*, ut alii, quibus melior fortasse ludus contigit, fictâ hujus confidentiâ decepti ab ultrà-certando absterreantur) negari tamen non potest, quin prævia expectationis cognitio ad ipsam hanc simulationem moderandam & gubernandam adjumentum haud leve conferre possit. Nos calculi specimen in unico tantùm exemplo exhibebimus;

Quoniam observatum olim mihi multoties recordor, hunc cui ab initio duo Novenarii obtigerant, non obstante hâc ludi bonitate perdidisse, cupidus sum sciendi, quanto majorem talis vincendi quàm perdendi

perdendi ſpem habeat. Atque ut quæſtionem plene determinem, pono me ordine priorem eſſe colluſore, mihi primis duabus chartis duos obtigiſſe Novenarios, alterique unum (ſive quod hoc ex provocationis meæ acceptatione præſumam, ſive quod aliunde mihi conſtet) & quærendam eſſe utriuſque expectationem.

Primò conſidero omnes poſſibiles ſtatus, in quos ludum proſequendo pervenire poſſum. Fieri autem poteſt, ut reliquæ duæ, quas expecto, pagellæ afferant mihi (prout in ſubjuncta Tabula ordine ſub lit. A videre eſt,) vel duos alios Novenarios, vel Novenarium cum Monade, Rege, Hera, Famulo, Denariove: vel duas Monadas, duos Reges, H. F. Denariosve: vel Monadem cum Rege, H. F. D-riove: Regem cum H. F. D-riove: Heram cum Famulo Denariove: Famulum denique cum Denario; easque dignitates vel ambas ejuſdem ſpeciei; vel diverſarum ſpecierum, easque rurſum tales, ut vel alterutra ſit ex ſpecie trifoliorum, vel neutra: ob famulum enim trifolii, qui Novenariis accenſetur, diſparitas hæc ſortes aliquantulum variat.

Deinde examino, quot caſibus ſingula horum evenire poſſint, conſiderando, quòd poſt acceptos à me duos Novenarios & unum à Colluſore, ſuperſunt folia 21, interque illa duo adhuc Novenarii, 4 Monades, totidem Reges, Heræ, Denarii, ac 3 Famuli, (nam etiamſi colluſor duo quoque folia acceperit, eoque propriè non niſi reſtent 20; quoniam tamen alterum illorum mihi ignotum eſt, tantundem hoc valet reſpectu neſcientiæ meæ, acſi non accepiſſet, egoque ad duo qualiacunque ex 21 foliis æqualem expectationem haberem.) Quibus perpenſis facillimum eſt enumerare caſus: caſus enim tot ſunt, quot foliorum reſiduorum combinationes. Poſſunt autem Novenarii reſidui ambo ſimul non niſi ſemel accipi: Novenarius cum Monade aut Rege &c. bis quater ſeu octies, cum Famulo tantùm bis ter ſeu ſexies combinari poteſt: Binarum autem Monadum aut binorum Regum &c. ſunt ſex, binorum Famulorum tres electiones: Porrò monas cum Rege, aut Hera &c. ejusdem ſpeciei, pro numero ſpecierum quater; Monas aut Rex &c. cum Famulo ter tantùm ſumi poteſt. Rurſum Monadis & Regis &c. diverſarum ſpecierum, quarum tamen altera ſit trifoliorum, ſex ſunt acceptiones; quando-

quandoquidem Monas trifolii cum ſingulis Regibus, & Rex trifolii cum ſingulis Monadibus trium reliquarum ſpecierum conjungi poteſt: quemadmodum etiam Monas trifolii cum Famulo alterius ſpeciei ter conjungitur. Monas denique cum Rege, Herâ, Famulo &c. aut alia duo folia datarum differentium dignitatum & diverſarum ſpecierum (ſed excluſo trifolio) ſexies combinantur; cùm ſingulæ ex. gr. trium Monadum cum ſingulis reliquarum duarum ſpecierum Regibus ſemel compingi poſſint. Et ſic facili negotio combinationum ſeu caſuum numeri ſinguli determinabuntur, quemadmodum in media columna ſub lit. B notati ſunt. Eorum omnium ſumma vel aggregatum reperitur 210 $\infty \frac{21.20}{1.2}$ quantus etiam eſt numerus binionum in chartis 21.

Tertiò calculo perquiro, quæ meæ vel colluſoris ſint expectationes in ſingulis recenſitis ſtatibus; quem in finem conſidero ante omnia, quòd exhibitis mihi duobus aliis foliis reſidua ſunt folia 19, quorum tria colluſori debentur; ſic ut ejus ludus tot variationibus obnoxius ſit, quot terniones in rebus 19 habentur, nempe $\frac{19.18.17}{1.2.3}$ ∞ 969, è quibus quot ipſi faveant, quot adverſentur, in quavis ludi mei conſtitutione porrò explorandum eſt; Patet autem, quòd ſive duobus meis Novenariis accedant duo alii Novenarii, ſeu Novenarius unus cum Monade, neceſſario perdere debet colluſor; tunc enim habebo Quadrigam Novenariorum aut Monadum, & ego ſum ex hypoth. ordine prior colluſore, qui Monadum tantùm Quadrigam ad ſummum conſequi poteſt. Sin Novenariis meis accedat Novenarius cum Rege, habebo Quadrigam Regum, & vinci poſſum à colluſore, ſi hic Quadrigam Monadum obtineat; unde cùm in reſiduis 19 foliis lateant 5 (unus videl. Novenarius & 4 Monades) quorum terna qualiacunque addita Novenario, quem habere præſumitur colluſor, Monadum Quadrigam efficiunt; atque in rebus 5 contineantur terniones 10, ſequitur colluſorem meum in variationibus 969 habere 10 ad vincendum & cæteros ad perdendum; id quod ipſi ſortem parit $\frac{10}{969}$. Si cum Novenario Hera mihi contingat, habebo Quadrigam Herarum, & vincere poteſt colluſor, ſive Monadum ſive Regum Quadrigam conſequatur; quare præter 10 caſus priores nunc alios 10, h. e. 20 ad

 vincen-

vincendum habet, id quod ipsi valet $\frac{20}{969}$. Similiter si cum Novenario Famulum obtineam, præter 20 caſus memoratos vincere poteſt colluſor 10 aliis, quibus quadrigam Herarum conſequitur; unde jam ejus ſors exiſtit $\frac{30}{969}$. Sed ſi Novenarius meus Denario ſtipetur, ſic ut inſuper Quadriga Famulorum colluſorem victorem reddere poſſit, accedentibus ad priores 30 caſus duntaxat 4 aliis, ſors ejus fiet $\frac{34}{969}$; quippe cùm in foliis 4 (quæ ipſius Novenario Trigam Famulorum addere poſſunt) tribus ſcil. Famulis & uno reſiduo Novenario non niſi terniones 4 habentur.

		A	B	C
		2 N	1	0
		N & M	8	0
		N & R	8	10
		N & H	8	20
		N & F	6	30
		N & D	8	34
		2 M	6	0
		2 R	6	20
		2 H	6	40
		2 F	3	60
		2 D	6	70
Ejusd. ſpec.		M & R	4	70
		M & H	4	70
		M & F	3	74
		M & D	4	70
		R & H	4	96
		R & F	3	100
		R & D	4	96
		H & F	3	100
		H & D	4	96
		F & D	3	100

♃

Diverſ. ſpec. quarum una triſol.	M & R	6	153
	M & H	6	153
	M & F	3	157
	M & D	6	153
	R & H	6	309
	R & F	3	313
	R & D	6	309
	H & F	3	445
	H & D	6	441
	F & D	3	553
neutra triſol.	M & R	6	148
	M & H	6	148
	M & F	6	152
	M & D	6	148
	R & H	6	304
	R & F	6	308
	R & D	6	304
	H & F	6	440
	H & D	6	436
	F & D	6	548
		210	969

♃

Quòd si Novenariis meis duæ Monades accesserint, rursus infallibiliter perdet collusor: si duo Reges, ipse vincere cum Monadum Quadriga potest; sed propter 4 Monadas & duos nunc residuos Novenarios, i. e. ob sex folia, quorum terniones omnes Novenario collusoris juncti Quadrigam hanc constituere possunt, viginti tunc ad vincendum casus habet. Quibus ob similem rationem accedunt alii 20, si loco Regum duas Heras: & rursus 20, si duos Famulos adeptus fuero. Sed si duos Denarios accepero, præcedentibus tantùm superaddendi casus 10; propterea quia sunt folia solum 5 (Famuli scil. tres & duo residui Novenarii) quorum terniones Famulorum Quadrigam collusori advehere possunt. Unde expectationes illius ordine habentur $\frac{20}{969}$, $\frac{40}{969}$, $\frac{60}{969}$ & $\frac{70}{969}$.

Porrò, si Novenariis meis jungatur Monas cum Rege, Hera, Famulo, Denariove homogeneo, habebo Fluvium 43 punctorum, & vincet collusor cum Quadriga qualicunque, non aliter: sin iis accedat Rex cum Hera, Famulo, Denariove homogeneo; aut Hera cum Famulo &c. habebo duntaxat Fluvium 42 punctorum; & vincet collusor cum qualicunque Quadriga, atque insuper cum Fluvio 43 punctorum. Si vero mihi cadat Monas cum Rege heterogeneo &c. habebo solummodo Trigam Monadum, & vincere potest alter cum Quadriga pariter ac Fluvio qualicunque; cujus proinde expectationes pro singulis his statibus pari modo seorsim investigantur, sed eo majori subinde labore, quo major collusori vincendi spes allucescit. Unde cùm omnia minutatim prosequi nimis prolixum foret, operationem apponam pro ultima tantùm hypothesi, quâ pono mihi cecidisse Famulum cum Denario alterius speciei (putà Famulum cordium cum Denario spiculorum) adeoque nonnisi Famulorum Triga me instructum esse. Collusorem itaque victorem reddet Quadriga quæcunque & Fluvius quilibet, nec non Triga Monadum, Regum atque Herarum: Quadrigarum casus determino, considerando, residua 19 folia consistere præter 2 N in 4 M, 4 R, 4 H, 2 F & 3 D, h. e. (Novenariis ad singulas dignitates adjunctis) in 6 M, 6 R, 6 H, 4 F & 5 D: horum namque terniones ostendunt, obtingere ipsi posse Quadrigam Monadum casibus 20, Regum & Herarum totidem, Famulorum casibus 4 & Denariorum 10, quorum omnium summa dat casus 74. Fluviorum porrò multitudinem ita exploro:

 Attendo,

Attendo, quòd in reliquis 19 foliis præter 2 N reperiuntur 4 ſpicula, 5 lateres, 4 corda & 4 trifolia; & quòd ad Fluvium conſtituendum ultra Novenarium, quo colluſorem jam compotem eſſe præſumo, requiruntur vel terna ejusdem ſpeciei folia, vel ſaltem bina, aſſumto unà Novenariorum reſiduorum alterutro: indeque concludo, Fluviorum numerum æquari numero ternionum in omnibus ſpeciebus, unà cum numero binionum bis ſumto; quare cùm terniones omnes ſint 4 + 10 + 4 + 4 ∞ 22, & biniones omnes 6 + 10 + 6 + 6 ∞ 28, ſequitur, ſummam caſuum ad Fluvios fore 22 + 28 + 28 ∞ 78. Ad Trigas denique quod attinet, earum numerum inire poſſum, ſi perpendam, quòd ad Trigam Monadum (Regum ſive Herarum) conſtituendam, Novenario quo jam pollet colluſor jungendæ vel binæ Monades (Reges aut Heræ) vel ſingulæ unà cum aſſumto Novenariorum reſiduorum alterutro: ſi binæ junguntur, quartum folium poterit eſſe quodlibet ex reliquis 13; adeo ut, cùm 4 Monades (Reges, Heræ) ſexies poſſint binæ accipi, ſexies quoque 13, i. e. 78 hinc variationes oriantur: ſi una ſola Monas (Rex aut Hera) ei jungitur cum Novenariorum reliquorum alterutro, pro quarto folio accipi poterit unumquodvis ex reliquis ſpeciebus, quod ſit inferioris dignitatis; nimirum cum Monade laterum ſigillatim poſſunt accipi 9 folia, & cum ſingulis reliquis 10; cum Rege laterum 6, & cum ſingulis reliquis 7; cum Hera laterum 3, & cum ſingulis reliquis 4; unde Monadum caſus emergunt 39, Regum 27, Herarum 15, qui numeri ob duos reſiduos Novenarios bis ſumpti & poſtmodum ſeorſim additi ſupra inventis 78 aliis variationibus producunt Trigas Monadum 156, Regum 132, & Herarum 108, quæ rurſus collectæ faciunt 396. Quoniam igitur repertum nobis eſt, omnes Quadrigarum caſus eſſe 74, Fluviorum 78, & Trigarum, quæ quidem colluſorem victorem reddere poſſunt, 396, ſequitur quòd conflatis in unam ſummam his numeris aggregatum 548 deſignet omnes in univerſum caſus, quibus ille victoria potiri poſſit; adeò ut ejus ſors exiſtat $\frac{548}{969}$, quemadmodum etiam ſupra in laterculo ſub lit. C. videre eſt, ubi ordine notati habentur numeratores fractionum, quæ exprimunt expectationes colluſoris in quovis ludi mei ſtatu, quarumque omnium communis denominator exiſtit 969.

His

His verò inventis, ut exploretur ſors, de qua principaliter quæſtio mota fuit, quam nimirum habemus priusquam ego poſtrema duo folia accipiam, nil ſupereſt aliud, quàm ut numeros caſuum columnæ B ducamus in numeratores reſpondentes columnæ C, & ſummam productorum dividamus per productum numeri omnium caſuum 210 in communem denominatorem 969: vel, quod brevius, ut numeratores omnes col. C, quibus æqualis caſuum numerus in col. B reſpondet, prius addantur, ac tum ſumma per illum caſuum numerum multiplicetur; tandemque productorum omnium aggregatum dividatur, ut antea. Et ſic quidem reperio, colluſoris mei ſortem eſſe $\frac{3.1902 + 4.498 + 6.4614 + 8.64}{210 \text{ in } 969} \infty \frac{35894}{203490} \infty \frac{17947}{101745}$; unde mea fiet $\frac{83798}{101745}$, paulo minùs quàm 5ies potior altera.

Cæterum examinanti Tabellam primo obtutu multa alia Theoremata ultro ſe offerunt, qualia ſunt hæc: Quòd ad æquam perveniam expectationem per Novenarium cum Hera, atque per duos Reges; item, per duos Denarios, atque per Monadem cum Rege, Hera, Denariove homogeneo: Quòd optabilior mihi ſit Novenarius cum Famulo Denariove, quàm duæ Heræ: Quòd duo differentium dignitatum & ſpecierum folia ſemper tantillo præſtabiliora ſint, ſi neutrum, quàm si alterutrum trifolium foret: Quòd Hera cum Denario alterius ſpeciei meam, Famulus cum Denario colluſoris conditionem paulo potiorem reddat &c.

Et hæc quidem omnia ita ſe habent in hypotheſi, quæ ſupponit duos mihi ab initio Novenarios, unum colluſori obtigiſſe; nam si de neutro colluſoris folio mihi conſtare ſupponatur, aliæ prodibunt expectationes & alia Tabula, quam induſtrius Lector mutatis mutandis ſimili modo concinnabit. Inveniet autem. si calculum ritè ſubduxerit, ſortem meam hoc caſu ad colluſoris ſortem ſe habere, ut 346988 ad 26077, adeoque nunc plus quam tredecies hâc meliorem eſſe.

Animus præterea fuerat, quasdam alias quæſtiones, de quibus frequens inter colluſores ſermo miſcetur, ſolutas hîc tradere; ex. gr. An præſtabilior ſit ab initio ludi Novenarius cum Famulo Denariove

riove, an vero duæ Monades? Aut uter duorum, quorum alter ab initio duas obtinuit Monadas, alter Novenarium cum Famulo Denariove, potiorem vincendi ſpem habeat? & ſimiles. Sed quia futilibus nimiam jam impendiſſe operam videri poſſum, hæc & alia rerum harum curioſo Lectori indaganda & calculo definienda relinquo.

PROBLEMA XIX.

In quolibet Aleæ genere, ſi ludi Oeconomus ſeu Diſpenſator (le Banquier du Jeu) *nonnihil habeat prærogativæ in eo conſiſtentis, ut paulo major ſit caſuum numerus quibus vincit quàm quibus perdit; & major ſimul caſuum numerus, quibus in officio Oeconomi pro ludo ſequenti confirmatur, quàm quibus œconomia in colluſorem transfertur. Quæritur, quanti privilegium hoc Oeconomi ſit æſtimandum?*

Sit in quolibet aleæ jactu numerus caſuum quibus vincit œconomus, ad numerum caſuum quibus perdit, in ratione p ad q, majoris ad minus: item numerus eorum quibus ipsi œconomia pro jactu ſequenti confirmatur, ad numerum horum quibus illa in colluſorem transfertur, in ratione m ad n, rurſum majoris ad minus. Evidens eſt, ſi ſolius præſentis, nulla ſequentis ludi haberetur ratio, fore (propter p caſus ad depoſitum 1, & q ad 0) ſortem œconomi $\frac{p}{p+q}$, colluſoris $\frac{q}{p+q}$, & ambas in ratione p ad q. Sed si ad futuros quoque ludos reſpiciatur, res plus obſcuritatis habet, nec obvium ſtatim eſt, quomodo prærogativa præſentis ludi & ſpes ad prærogativam

prærogativam ſequentis conjunctim ſint æſtimandæ; ac proinde facilis in paralogiſmos prolapſus eſt, niſi probè advertatur. Memini me aliquando ſic argumentatum fuiſſe: Si idem perpetuò maneret œconomus, ſemper eandem haberet prærogativam ſeu ſortem, quam ratio p ad q definit; igitur quando periculum eſt amittendæ œconomiæ, hactenus pejor ejus conditio cenſenda videtur. Sit hæc x, & colluſoris y; fiet (ob p caſus ad 1, q ad 0, m caſus ad permanendum in ſtatu œconomi, & n caſus ad acquirendum ſtatum colluſoris) $x \infty \frac{p+mx+ny}{p+q+m+n}$, & ſimili modo ſors colluſoris $y \infty \frac{q+my+nx}{p+q+m+n}$; quibus æquationibus debitè inter ſe collatis habetur $x.y::p+n.q+n$ minor, uti collegeram, quàm p ad q. Alia vice ſic arguebam: Si œconomo debeatur $\frac{p}{p+q}$, colluſori $\frac{q}{p+q}$ depoſiti, ſintque m caſus quibus ille in ſtatu œconomi confirmatur, & n caſus quibus in ſtatum alterius tranſit, erit ſors ejus $\frac{m.p:p+q+n.q:p+q}{m+n} \infty \frac{mp+nq}{m+n\cdot p+q}$, relinquiturque alteri $\frac{mq+np}{m+n\cdot p+q}$; ſic ut ratio ſortium fiat, ut $mp+nq$ ad $mq+np$, rurſum minor quàm p ad q, etsi diverſa ab alterâ $p+n$ ad $q+n$. Vix autem ita collegeram, cùm utrumque hoc ratiocinium rurſus ceu præpoſterum & fallax rejeci, quippe cui ſummè videbatur ἄτοπον, ut major probabilitas retinendi quàm amittendi munus œconomi minuère potiùs quàm augere dicatur prærogativam œconomiæ annexam: quare aliquandiu eo propendebam, ut crederem prærogativam hanc compoſitam eſſe debere ex utraq; ratione p ad q, & m ad n; adeoq; ſortem œconomi ad colluſoris ſortem eſſe in ratione pm ad qn, majore quàm p ad q, vel m ad n ſeorſim. Verùm nec iſtud aſſertum evidentiæ quicquam habere ſenſi, quin & reapſe à vero abludere deprehendi, poſtquàm genuinum ſolvendi modum reperiſſem. Nolo autem oſtendere, in quo laborent allata ratiocinia. ad veriorem potiùs ſine morâ ſolutionem tranſiturus, præ cujus jubare ſpurium illorum lumen mox ultrò diſpariturum puto.

Hanc qui legitimè inveſtigare cupit, ad duo advertere debet: unum, ut per Coroll. 5. Propoſ. 3. part. 1. determinet, quantum œcono-

œconomo non ex toto depoſito, ſed ex ſolâ colluſoris pecunia debeatur: alterum, ut hanc illi debitam portionem pro ſingulis ſubſequentibus jactibus ſive ludis ſeorſim exploret, quo omnium additione totalis expectatio pateſcat. Poſito itaque Aleatores ita inter ſe convenisſe, ut poſt quemlibet jactum victus victori tradere teneatur a, liquet, habere œconomum in primo jactu p caſus ad lucrandum a, & q caſus ad perdendum a, h.e. ad acquirendum $-a$; adeoque partem ipſi debitam ex colluſoris pecunia eſſe $\frac{p.a + q.-a}{p+q} \infty \frac{pa-qa}{p+q}$ ſeu (factis $p-q \infty r$, & $p+q \infty s$) $\frac{ar}{s}$: quemadmodum contra colluſor, ob q caſus ad lucrandum a, & p ad perdendum, habere cenſetur $\frac{-ar}{s}$.
Et quoniam præterea œconomus in primo jactu habet m caſus, quibus privilegium œconomiæ retinet, h.e. quibus acquirit pro jactu ſecundo $\frac{ar}{s}$; & n caſus quibus illud amittit, h.e. quibus acquirit $\frac{-ar}{s}$; debebitur etiam ipſi ex pecunia colluſoris a ſecundi jactus $\frac{m.\overline{ar:s} + n.\overline{-ar:s}}{m+n} \infty \frac{mar-nar}{\overline{m+n}.s} \infty$ (verſis $m-n$ in t, & $m+n$ in v) $\frac{art}{sv}$: & colluſori viciſſim ex pecunia œconomi $\frac{-art}{sv}$, id eſt, propter ſignum — debebit ille huic tantundem: Similiter ob eoſdem m & n caſus primi jactus, quibus œconomia pro jactu ſequenti vel confirmatur œconomo, vel ab ipſo aufertur, fiet per modo oſtenſa ipſius jus in pecuniam a tertii jactus, ceu à ſecundo ſecundi, $\frac{m.\overline{art:sv} + n.\overline{-art:sv}}{m+n} \infty \frac{\overline{m-n}.art}{\overline{m+n}.sv} \infty \frac{artt}{svv}$; & colluſoris viciſſim $\frac{-artt}{svv}$. Atque ſic porrò eadem ratione invenitur deberi œconomo de pecunia jactus 4ti, ceu à ſecundo tertii, $\frac{m.\overline{artt:svv} + n.\overline{-artt:svv}}{m+n} \infty \frac{art^3}{sv^3}$; & de pecunia jactus 5ti $\frac{art^4}{sv^4}$ &c. colluſori verò $\frac{-art^3}{sv^3}$, $\frac{-art^4}{sv^4}$ &c. & ſic deinceps, quouſque fuerit opus. Collectis igitur in unam ſummam portionibus, quæ œconomo pro ſingulis ſucceſſivè jactibus debentur, fiet ejus expectatio

pectatio totalis $\frac{ar}{s} + \frac{art}{sv} + \frac{artt}{svv} + \frac{art^3}{sv^3} + \frac{art^4}{sv^4}$ &c. expressa vid. per seriem quantitatum geometricè progredientium in ratione v ad t, eo usque continuandam, donec numerus terminorum æquetur numero jactuum seu lusionum, de quo initio inter Aleatores convenit, aut quem alias ante discessum eorum absolvi posse præsumitur. Hunc numerum si vocemus z, erit ultimus seriei terminus $\frac{art^{z-1}}{sv^{z-1}}$, & summa totius seriei $\frac{ar}{s}$ in $\frac{v - t^{z} : v^{z-1}}{v-t} \infty \frac{ar}{s}$ in $\frac{\overline{m+n} - t^{z} : v^{z-1}}{2n}$.

Coroll. 1. Si differentia inter m & n, adeoque ratio $\frac{t}{v}$ minuscula sit, aut saltem numerus lusionum z majusculus, pro summa inventa poterit scribi $\frac{ar}{s}$ in $\frac{m+n}{2n}$ absque sensibili excessu, evanescente vid. quantitate $\frac{t^{z}}{v^{z-1}}$, quippe ad v & t eo ordine proportionali, quem indicat numerus lusionum z unitate auctus. Quare tum valor totius prærogativæ œconomi, ad $\frac{ar}{s}$, id quod ipsi pro solo primo ludo deberetur, ferè se habet, ut $m+n$ ad $2n$.

Cor. 2. Si tempore exiguo magnus lusionum numerus possit absolvi, œconomus autem à ludendo desistere, alterique cuidam suam prærogativam vendere velit, accipiet ab ipso $\frac{ar}{s}$ in $\frac{m+n}{2n}$: si verò in lusu pergere, & œconomiam tantùm cum statu collusoris permutare cupiat, dabit ipsi collusor, qui in œconomi munus succedit, duplum, nempe $\frac{ar}{s}$ in $\frac{m+n}{n}$; simplum enim ipsi deberet, si nunc à ludo omninò cessare vellent; ac deinde rursus tantundem, si ludum redauspicari, alterque sibi œconomiam sponte cedere cuperet.

Cor. 3. Si sit $m \infty p$, & $n \infty q$, valor $\frac{ar}{s}$ in $\frac{m+n}{2n}$ contrahitur ad $\frac{a.\overline{p-q}}{2q}$, ejusque duplum $\frac{ar}{s}$ in $\frac{m+n}{n}$ ad $\frac{a.\overline{p-q}}{q}$.

PROBLEMA XX.

Æstimatio sortis in ludo chartarum, vulgò Capriludium, das Bockspiel, dicto.

Usus hujus ludi frequens inter nostrates. Instituitur chartis lusoriis inter duos pluresve collusores, quorum unus, qui contra cæteros decertat, & œconomi fungitur munere (der den Bock hat,) postquam folia miscuit, eorum systema in tot manipulos dispescit, quot una secum collusores adsunt; tum singuli horum singulos sibi manipulos admoto pretio mercantur, postremum œconomo relinquentes, qui tandem inversis manipulis ima eorum folia, præter quæ alia nulla considerantur, retegit. Quo facto his, quorum folia dignitate superant folium œconomi, pendere tenetur œconomus tantum, quantum quisque aleæ exposuit; sed quibus folia cecidêre humilioris vel etiam paris dignitatis cum folio œconomi, illi depositi sui jacturam patiuntur, cedente hoc contra in emolumentum victoris œconomi, qui suo præterea munere fungi pergit, quamdiu vel unicum collusorum devicerit, nec officio œconomi exuitur, nisi ab omnibus omninò collusoribus fuerit superatus.

His positis & intellectis, si valor expectationis œconomi sit investigandus, determinandæ tantùm restant rationes $p:q$, $m:n$, hoc est, definiendum quot casibus vincere & quot perdere queat œconomus in quavis lusione; item quot casibus ille jus œconomi servare, quot amittere possit: cætera enim ex præced. Problemate repetuntur. Sit itaque numerus specierum, in quas divisum est chartarum systema, f; & numerus dignitatum in quavis specie, g; adeoque universus foliorum numerus fg. Unde

1. *Si duo tantùm fiunt manipuli*; patet, ambo eorum folia ima toties variari posse, quot biniones in universis foliis fg continentur, nempe $\frac{fg\,\overline{fg-1}}{2}$. Horum binionum nonnulli ejusdem, alii differentium dignitatum chartis constant, quorum numerus seorsim sic initur: Quoniam uniuscujusque dignitatis folia f biniones recipiunt $\frac{f\,\overline{f-1}}{2}$, & dignitatum numerus est g; idcirco numerus omnium binionum

nionum, qui folia exhibent isodynama sive ejusdem dignitatis, est $\frac{fg\cdot\overline{f-1}}{2}$, quo subducto ab universis $\frac{fg\cdot\overline{fg-1}}{2}$, relinquitur $\frac{fg\cdot\overline{fg-f}}{2}$ ∞ $\frac{fg\cdot\overline{g-1}}{2}$ numerus binionum, qui differentium dignitatum foliis constant. Atqui cùm ambo folia ima sunt isodynama, utrumvis sibi eligat collusor, œconomus ex ludi præscripto non potest non vincere, id quod ipsi valet 1; sin verò diversis pollent dignitatibus, uterque æqualem habet ad vincendum & perdendum expectationem, quandoquidem collusor æquè facilè humilioris ac altioris dignitatis folium eligere potest, id quod utrivis valet $\frac{1}{2}$. Sunt igitur œconomo $\frac{fg\cdot\overline{f-1}}{2}$ casus ad 1, & $\frac{fg\cdot\overline{g-1}}{2}$ ad $\frac{1}{2}$, quod facit $\frac{fg+f-2}{2fg-2}$, & relinquitur ejus collusori $\frac{fg-f}{2fg-2}$: hoc verò per Annot. ad lit. I. Prop. XI. part. 1. tantundem est, acsi haberet œconomus $fg+f-2$ casus ad lucrandum, & $fg-f$ casus ad perdendum; quare constat esse $p.q::fg+f-2.fg-f$. Et quoniam is præterea retinet pro ludo sequenti jus œconomi, quoties vincit; eoque excidit quoties perdit, patet etiam hic esse $m \infty p$, & $n \infty q$.

Nota, si sit numerus specierum $f \infty 4$, fit $p.q(::m.n)$ $::2g+1.2g-2$; quæ rursus posito numero dignitatum $g \infty 9$ reducitur ad $p.q::19.16$. Hinc sumto, quòd collusor pro singulis lusionibus deponere soleat a, debebitur œconomo per præced. Probl. ejusque Coroll. 3. pro primo ludo $\frac{ar}{s} \infty \frac{a.\overline{p-q}}{p+q} \infty \frac{3}{35}a$, pro omnibus ludis $\frac{a.\overline{p-q}}{2q} \infty \frac{3}{32}a$, excessu non superante unam centies millionesimam partem ipsius a in ludis tantùm 7. Si igitur œconomus à ludo cessare velit, tertio cuidam prærogativam suam vendere poterit pretio $\frac{3}{32}a$; at si ludum continuare, & jus tantùm suum in collusorem transmittere malit, accipiet ab ipso duplum, nempe $\frac{3}{16}a$.

2. *Si tres sint manipuli*, totidemque unà cum œconomo sint collusores, liquet, duorum quorumvis manipulorum folia infima tot rursum variationibus obnoxia fore, quot biniones in universo chartarum numero continentur, cùm tertius manipulus considerari possit

acsi abesset, ejusque folia omnia cæteris manipulis adhuc essent permista: quare œconomo tot erunt casus, quibus utrumvis suorum collusorum seorsim superet, aut superetur ab ipso, quot erant in hypothesi duorum tantùm manipulorum; hoc est, manebit, ut antea, $p.q::fg+f-2.fg-f::$ (in casu $f \infty 4$) $2g+1.2g-2$. Sed variat ratio m ad n, pro numero collusorum seu manipulorum, quorum quo plures sunt, hoc difficiliùs œconomum munere suo excidere permittunt. Pro tribus manipulis considero, eorum folia ima tot variationes subire posse, quot terniones recipiunt omnia folia $4g$ (sic pono pro fg, concisioris calculi ergò, & quòd præter quaternarium non alius specierum numerus sit in usu) nempe $\frac{4g.4g-1.4g-2}{1.2.3} \infty \frac{32g^3-24gg+4g}{3}$.

Horum ternionum nonnulli ex tribus foliis ejusdem dignitatis, alii ex duobus ejusdem cum tertio diversæ dignitatis, alii denique ex trium differentium dignitatum foliis constant: nimirum, cùm cujusq; dignitatis folia 4, terniones admittant 4, biniones 6, & dignitatum numerus sit g, erit numerus omnium ternionum ejusdem dignitatis $4g$, & binionum $6g$, quorum rursus binionum quilibet secum assumere potest quodlibet ex reliquarum $g-1$ dignitatum foliis $4g-4$; quod efficit terniones $24gg-24g$, quorum una medietas $12gg-12g$ duobus foliis isodynamis tertium altioris, altera medietas tertium inferioris dignitatis folium adjunctum habet; unde subductis $4g$ & $24gg-24g$ ex universo ternionum numero $\frac{32g^3-24gg+4g}{3}$ remanent terniones $\frac{32g^3-96gg+64g}{3}$, qui omnes trium differentium dignitatum folia exhibent.

Jam autem si tribus manipulorum foliis infimis ejusdem dignitatis esse contigerit, œconomus ex ludi præscripto œconomia excidere nequit, utrumq; sors tulerit: neq; etiam, cum duobus ejusdem, tertium elevatioris dignitatis fuerit adjunctũ; at si tertium hoc humilioris fuerit gradus, vel etiam omnia tria folia dignitatis gradu discrepent, œconomus uno casu jus suum amittere (si nempe infimi gradus folium sibi ceciderit,) duobus servare potest, quod ipsi valet $\frac{2}{3}$. Sunt igitur ipsi $4g$ casus ad 1, & rursus $12gg-12g$ casus ad 1, nec non $12gg-12g$ ad $\frac{2}{3}$, iterumq;

$32g^3$

$\frac{32g^3 - 96gg + 64g}{3}$ ad $\frac{2}{3}$; id quod facit $\frac{16gg - 3g - 4}{24gg - 18g + 3}$, & relinquuntur ad complendam unitatem $\frac{8gg - 15g + 7}{24gg - 18g + 3}$; quod tantundem est, acsi diceretur habere $16gg - 3g - 4$ casus ad servandam, & $8gg - 15g + 7$ casus ad amittendam œconomiam; adeò ut inventa sit ratio $m.n :: 16gg - 3g - 4 . 8gg - 15g + 7$.

Nota, si g determinetur ad 9, erit $p:q \infty 19:16$, & $m:n \infty 253:104$. Unde posito, quòd alter collusorum deposuerit a, & alter b, debebitur œconomo per præced. Probl. ejusque Coroll. $\frac{a.p-q.m+n}{p+q.2n} \infty \frac{153}{1040}a$ respectu prioris, & $\frac{b.p-q.m+n}{p+q.2n} \infty \frac{153}{1040}b$ respectu posterioris collusoris; adeoque respectu utriusq; $\frac{153}{1040}\overline{a+b}$, non excedente una centies millesimâ parte ipsius $a+b$ in ludis undecim. Quapropter œconomus quarto cuidam, qui in locum suum succedere cupiet, privilegium suum vendet pretio $\frac{153}{1040}\overline{a+b}$; alterutri verò collusorum, quicum vices suas permutare volet, putà illi qui deposuit a, pretio $\frac{153}{1040}\overline{2a+b}$; nam deberetur ipsi primo per modo dicta $\frac{153}{1040}\overline{a+b}$, si ludus nunc abrumperetur; ac deinde, si reassumeretur, adhuc $\frac{153}{1040}a$, quandoquidem cedendo alteri œconomiam ludi, se debitorem ejus pro hac summa constituit.

3. *Si quatuor constituuntur manipuli*, totidemque cum œconomo habentur collusores, tot rursum casus præstò sunt, quibus ille unumquemque suorum collusorum seorsim vincat aut vincatur ab ipso, quot erant in duabus præcedd. hypoth. quod idem etiam intellige de quovis manipulorum numero, cùm certè bini ipsorum quivis considerari semper possint, acsi præter ipsos nulli adessent; unde eadem perpetuo manebit ratio $p:q \infty 2g+1 : 2g-2$. Sed alteram rationem $m:n$, quam numerus manipulorum auget, sic exploro: Considero, quòd quatuor manipulorum folia ima, *I.* vel omnia possint esse isodynama sive ejusdem dignitatis: *II.* vel tria ejusdem cum quarto aut altioris, *III.* aut humilioris dignitatis: *IV.* vel duo ejusdem, & reliqua duo pariter ejusdem, sed diversæ ab altera dignitatis: *V.* vel duo ejusdem cum reliquis duobus diversarum dignita-

tum, quarum rurſus vel utraque poſſit eſſe eminentioris: *VI.* vel utraque ignobilioris: *VII.* vel una eminentioris, altera inferioris gradus: *VIII.* vel omnia deniq; quatuor folia differentium dignitatum.

Horum ſi Primum, Secundum, Quartum aut Quintum contigerit, œconomus ex ludi præſcripto muneris ſui jacturam facere nequit: ſi Tertium, VI, VII, vel VIII^vum^ acciderit, uno tantùm illud caſu amittere (ſi vid. infimæ dignitatis folium ſibi relinquatur) tribus caſibus retinere poteſt; quod ipsi proin dat $\frac{3}{4}$. Sed primum horum evenire deprehendo caſibus g; Secundum caſibus $8gg - 8g$: Tertium totidem: Quartum $18gg - 18g$: Quintum caſibus $16g^3 - 48gg + 32g$: Sextum & Septimum totidem: Ultimum deniq; caſibus $\frac{32}{3}g^4 - 64g^3 + \frac{352}{3}gg - 64g$, exiſtente numero omnium caſuum, ceu ſumma quaternionum in foliis univerſis, $\frac{32}{3}g^4 - 16g^3 + \frac{22}{3}gg - g$; quæ omnia, ut verbis parcam, induſtrio Lectori probanda relinquo. Quocirca habebit œconomus, g plus $8gg - 8g$ plus $18gg - 18g$ plus $16g^3 - 48gg + 32g$ caſus ad 1, & $8gg - 8g$ plus $16g^3 - 48gg + 32g$ plus iterum $16g^3 - 48gg + 32g$ plus $\frac{32}{3}g^4 - 64g^3 + \frac{352}{3}gg - 64g$ caſus ad $\frac{3}{4}$; id quod ipsi parit $\frac{24g^3 - 24gg + 3}{32g^3 - 48gg + 22g - 3}$ expectationis ad retinendum munus œconomi; & deeſt ad complendam unitatem $\frac{8g^3 - 24gg + 22g - 6}{32g^3 - 48gg + 22g - 3}$ pro metu amittendi muneris; ſic ut cenſenda ſit ratio $m.n :: 24g^3 - 24gg + 3 . 8g^3 - 24gg + 22g - 6$.

Nota, quòd ſi g determinetur ad 9. fiet $p.q :: 19.16$, & $m.n :: 15555.4080 :: 61.16$. Sumto itaque, quòd unus colluſorum depoſuerit a, alter b & tertius c, debebitur œconomo per præc. Probl. ejusque Coroll. $\frac{p - q.\overline{m+n}}{p + q.2n}\overline{a+b+c} \infty \frac{33}{160}\overline{a+b+c}$, non una decies milleſima parte ipſius $a+b+c$ minus in ſolis 15 ludis. Quocirca si quinto cuidam locum ſuum cedere velit œconomus, ipſe à ludo ceſſaturus, venundabit illi privilegium œconomi pretio $\frac{33}{160}\overline{a+b+c}$; at si, continuaturus ludum, cum colluſorum

quodam

quodam sortem suam commutare cupiat, accipiet ab ipso vel $\frac{33}{160}$ $\overline{2a+b+c}$, vel $\frac{33}{160}$ $\overline{a+2b+c}$, vel $\frac{33}{160}$ $\overline{a+b+2c}$, prout is deposuerit vel a, vel b, vel c.

Atque haud absimiliter determinari poterit valor prærogativæ œconomi, si plures ponantur manipuli & collusores.

PROBLEMA XXI.

De Ludo Bassetæ (de la Bassette.)

Celebratissimus est hic ludus ob innumeras turbas & tragœdias, quas hinc inde, in Italia præsertim & Gallia, olim excitavit, ob quas etiam ex istis regionibus non multò post proscriptus & sub gravi pœna prohibitus fuit. Eo tempore, quo exercitium illius in aula Regis Galliarum maximè florebat, D. Salvator (*Sauveur*) Mathematicus Gallus & Seren. tum Delphini Præceptor expectationes ludentium calculo subjecit, brevique Tabularum quarundam synopsi comprehensas in Parisiensi Erudit. Diario m. Febr. 1679 in lucem edidit; è quo Diario nos de natura & constitutione hujus ludi ea recensebimus, quæ ad examinandas Tabulas & eruendum quem Auctor suppressit calculum scitu necessaria videbuntur.

Postquam is, qui œconomi fungitur munere, completum chartarum lusoriarum systema prehendit & miscuit, singuli collusorum ante se in mensa exponunt folium cujuslibet dignitatis aliunde depromtum unà cum arbitraria pecuniæ summa. Tum verò œconomus systemate suo, ut imum ejus folium pateat, inverso, factoq; ab eodem initio bina subinde folia successivè & ordine ad finem usque systematis tollit; quòd dum exequitur, cujusvis foliorum paris seu bigæ folium anterius sive præcedens in œconomi, posterius & sequens in collusoris commodum cedere censetur, ita nimirum, ut si anterius Regis verbi gratia imaginem habeat, œconomus auferat quicquid Regibus appositum est; si vero posterius, collusoribus vicissim pendere tantundem teneatur, quantum illi Regibus apposuère. Et

re. Et hactenus quidem nullus præ altero quicquam prærogativæ habet: sed sequentes præterea leges notandæ:

1. Si ambo folia sunt isodynama & ejusdem cum exposito dignitatis (quod *doublets* appellant, nos *gemella* vocabimus) quo casu lucri & damni deberet fieri compensatio, solus tamen lucratur œconomus, aufertque quod dignitatis illius foliis appositum est.

2. Cuilibet collusorum etiam in medio ludi integrum est, de novo quodlibet folium pretio mercari; quo pacto fieri potest, ut in chartis residuis vel unum tantum, vel 2, 3, aut omnia 4 illius dignitatis folia supersint; quod sortem ipsius notabiliter variat. Sed observandum, quòd biga illa, cujus alterutrum conspexerit folium, nullius censetur valoris ratione dignitatis quam mercatus est; & quidem, si posterius folium bigæ ejusmodi hâc dignitate vestitum compareret, non tantum ceu *præcox* (*trop jeune*) nihil acquirit collusori, sed & ludo finem imponit alterius folii optione redauspicando: sin autem dignitas illa prodeat in proximo folio bigæ sequentis, *valoris* saltem est *imminuti* (*c'est une face*) œconomoque non nisi bessem seu duos trientes depositi lucratur.

3. Anterius quoque folium primæ bigæ, cùm suspicio esse possit illud visum œconomo, valoris semper est imminuti, eumque non nisi ex besse victorem reddere potest.

4. Cùm unico folio ejus dignitatis, pro qua decertatur, superstite, foliis gemellis, in quibus prærogativa œconomi consistit, non possit esse locus, statutum est in favorem œconomi, ut postrema omnium charta, quæ alias collusori prodesse deberet, pro nulla haberetur.

Quibus ita præmissis, pergo exponere methodum, qua expectationes œconomi quàm promtissimè determinantur: Posito numero bigarum residuarum n, adeoq; numero foliorum $2n$, & collusoris deposito 1, ante omnia considero, quòd in unaquaq; biga vel neutrum, vel alterutrum, vel utrumq; folium possit esse expositæ dignitatis: si neutrum, liquet per hanc bigam nihil nec acquiri nec perdi œconomo: si alterutrum, constat, eadem facilitate utrumvis esse posse (cùm excipiendis reliquo aut reliquis illius dignitatis foliis eadem in bigis

bigis ſequentibus loca pateant:) ac totidem proinde caſus eſſe, quibus vincat œconomus ſive acquirat $+1$, & quibus perdat ſive obtineat -1: qui propterea quia ſe mutuò deſtruunt, magno quoque compendio inſuper haberi poſſunt. Soli ergo reſtant expendendi caſus, quibus contingere poteſt, ut folia alicujus bigæ ſint gemella, id eſt, ut ambo ſint illius dignitatis.

I. Equidem ſi unicum ejus dignitatis folium ſuperſit, quo caſu folia gemella eſſe non poſſunt, liquido patet, ratione cujusvis bigæ ſeorſim, si ultimam excipias, nullam eſſe poſſe prærogativam œconomi (vid. *Tab.* 5.). Quoniam tamen poſtrema charta, quæ colluſori prodeſſe poſſet, per leg. 4. pro nulla habetur, ſit ut ratione omnium ſemper uno caſu amplius lucrari, quàm perdere poſſit œconomus; quod propter numerum foliorum $2n$ ceu totidem caſuum, quibus expoſitæ dignitatis folium ſubeſt, prærogativam œconomi in bigis univerſis facit $\frac{1}{2n}$ (*Tab.* 1.). Rurſus autem, si proxima biga ſit valoris imminuti pro œconomo, ex univerſis $2n$ caſibus unus eſt, qui ipſum triente depoſiti privat, per leg. 3. quod decrementum prærogativæ ejus efficit $\frac{1.1:3}{2n} \infty \frac{1}{6n}$ (*Tab.* 2.). Hoc igitur ablato tum ex $\frac{1}{2n}$, tum ex o, relinquitur $\frac{1}{3n}$ & $-\frac{1}{6n}$, pro reſiduo lucro œconomi ratione universi ludi, aut damno ejus ratione ſolius bigæ quæ imminuti eſt valoris. (*Tab.* 3 & 6.).

II. Si duo expoſitæ dignitatis folia reſtent, tot illa variationibus ceu caſibus obnoxia ſunt, quot biniones in foliis $2n$ continentur, nempe $\frac{2n.2n-1}{2}$. Horum in ſingulis bigis unus, adeoque in univerſis n bigis, n caſus exiſtunt, qui foliis gemellis œconomo victoriam procurare poſſunt; unde in ſingulis lucrum illius efficitur $\frac{1}{2n.2n-1:2} \infty \frac{1}{2nn-n}$ (*Tab.* 5.), in univerſis $\frac{n}{2n.2n-1:2} \infty \frac{1}{2n-1}$ (*Tab.* 1.). Quòd si alterutrum dignitatis illius folium primo ſtatim loco primæ bigæ prodeat, adeoque valoris ſit imminuti per leg. 3. alterum folium ad unumquemque ex reliquis $2n-1$

locis indifferenter se habendo, totidem casus præbet, quibus lucrum œconomi triente minuitur, cujus proinde decrementum æstimatur $\frac{2n-1.\,1:3}{2n.2n-1:2}$ ∞ $\frac{1}{3n}$ (*Tab.* 2.). Hoc ergo detracto tum ex $\frac{1}{2n-1}$, tum ex $\frac{1}{2nn-n}$, remanet pro lucro residuo in ludo universo $\frac{n+1}{6nn-3n}$ (*Tab.* 3.) & pro damno in sola prima biga $\frac{-2n+4}{6nn-3n}$ (*Tab.* 6.).

III. Si tria optatæ dignitatis folia supersint, tot casuum varietates inducunt, quot terniones in foliis $2n$ locum habent, videl. $\frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}$ ∞ $\frac{2n.2n-1.2n-2}{6}$ Ex horum numero foliorum gemellorum casus elicio, considerando quòd, positis alicujus bigæ foliis ambobus laudatæ dignitatis, tertium iis suppar folium unumquemque ex reliquis $2n-2$ locis occupare possit, eoq; tot casus pro illa biga suppeditet: unde, cùm sumtis successivè pro n numero bigarum, 1, 2, 3, 4 &c. numeri horum casuum fiant 0, 2, 4, 6 &c. erunt foliorum gemellorum casus in omnibus n bigis, $0+2+4+6+$ &c. usque ad $2n-2$ ∞ (propter progress. arithm.) $n.n-1$. Quare lucrum œconomi in qualibet biga separatim valet $\frac{2n-2}{2n.2n-1.2n-2:6}$ ∞ $\frac{3}{2nn-n}$ (*Tab.* 5.), in omnibus conjunctim $\frac{n.n-1}{2n.2n-1.2n-2:6}$ ∞ $\frac{3}{4n-2}$ (*Tab.* 1.). Quòd si unum horum trium foliorum primo statim loco exeat, eoque sit valoris imminuti per leg. 3. reliqua duo toties locari possunt diversimodè, quot biniones cætera $2n-1$ folia recipiunt, adeoque $\frac{2n-1.2n-2}{2}$ casus suppeditant, quibus lucrum œconomi triente mulctatur; cujus proin detrimentum fit $\frac{2n-1.2n-2.\,1:6}{2n.2n-1.2n-2:6}$ ∞ $\frac{1}{2n}$ (*Tab.* 2.). Hoc igitur ablato partim ex $\frac{3}{4n-2}$, partim ex $\frac{3}{2nn-n}$, relinquitur illic $\frac{n+1}{4nn-2n}$ (*Tab.* 3.) pro lucro residuo in bigis universis: isthic $\frac{-2n+7}{4nn-2n}$ (*Tab.* 6.) pro damno in prima separatim.

IV. Si

IV. Si omnia 4 expoſitæ dignitatis folia chartis reſiduis adhuc immerſa lateant, tot caſus in univerſum ſuggerunt, quot qua-

Tabellæ:

Numerus foliorum expoſitæ dignitatis in chartis reſiduis:

I. II. III. IV.

1. *Lucrum œconomi in bigis reſiduis, cùm omnes ſunt valoris integri:*

$$\frac{1}{2n} \qquad \frac{1}{2n-1} \qquad \frac{3}{4n-2} \qquad \frac{4n-5}{4nn-8n+3}$$

2. *Si prima eſt valoris imminuti, fit decrementum lucri:*

$$\frac{1}{6n} \qquad \frac{1}{3n} \qquad \frac{1}{2n} \qquad \frac{2}{3n}$$

3. *Reſiduum lucri in bigis, quarum prima eſt valoris imminuti:*

$$\frac{1}{3n} \qquad \frac{n+1}{6nn-3n} \qquad \frac{n+1}{4nn-2n} \qquad \frac{4nn+n-6}{12n^3-24nn+9n}$$

4. *Lucrum œconomi in bigis reſiduis, initio facto ab illa quæ nulla eſt:*

$$\frac{2}{6n-3} \qquad \frac{n}{6nn-9n+3} \qquad \frac{nn-2n}{4n^3-12nn+11n-3} \qquad \frac{4nn-7n-3}{12n^3-36nn+33n-9}$$

5. *Lucrum œconomi in qualibet biga valoris integri, citra reſpectum ad bigas ſequentes:*

$$0 \qquad \frac{1}{2nn-n} \qquad \frac{3}{2nn-n} \qquad \frac{6}{2nn-n}$$

6. *Damnum œconomi in biga valoris imminuti, citra reſpectum ad lucrum, quod habet in ſequentibus:*

$$-\frac{1}{6n} \qquad \frac{-2n+4}{6nn-3n} \qquad \frac{-2n+7}{4nn-2n} \qquad \frac{-4n+20}{6nn-3n}.$$

terniones in chartis $2n$ continentur, nempe $\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4}$ ∞ $\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{24}$. Et ſi duo illorum in eadem biga ſe ſe gemello amplexu excipiunt, reliqua duo toties ordinem variare poſſunt in cæteris $2n-2$ chartis, quot hæ biniones admittunt; unde pro

de pro illa biga foliorum gemellorum casus $\frac{2n-2.2n-3}{2}$ emergunt. Et quoniam sumtis successivè pro n numero bigarum 1, 2, 3, 4, 5, &c. numeri casuum evadunt 0, 1, 6, 15, 28 &c. hinc gemellorum casus in omnibus n bigis collectivè accepti erunt $0+1+6+15+28+$ &c. usque ad $\frac{2n-2.2n-3}{2}$, de cujus seriei summa nunc dispiciendum. Video autem, hanc variis modis elici posse:

1. *Mod.* Quia termini seriei secundas suas differentias æquales habent, erunt figuratorum analogi, quorum summa quo pacto inveniri possit, supra part. 2. in fin. cap. 3. ostensum.

2. *Mod.* Quoniam iidem etiam ex ipsa Trigonalium serie per saltum sunt excerpti, resolvatur Trigonalium series A à gemina cyphra incipiens in duas alias B & C, quarum illa nostra sit, & imparium: hæc parium locorum terminos complectatur. Resolvatur itidem series C in duas B & D; sic erit A ∞ B + C ∞ B + B + D ∞ 2B + D, adeoque A − D ∞ 2B, & B ∞ $\frac{1}{2}$A − $\frac{1}{2}$D; & quia numerus terminorum seriei B (ut & C & D) per hypoth. est n, numerus termin. seriei A erit $2n$, ipsaque series A (per cap. 3. part. 2.) ∞ $\frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}$, series verò D (ob arithm. progr.) ∞ $n.n-1$. Quare series proposita B ($\frac{1}{2}$A − $\frac{1}{2}$D) ∞ $\frac{n.2n-1.2n-2}{1.2.3} - \frac{n.n-1}{2}$ ∞ $\frac{4n^3-9nn+5n}{6}$.

A	B	C	D
0	0	0	0
0	1	3	2
1	6	10	4
3	15	21	6
6	28	36	8
10			
15			
21			
28			
36			

3. *Mod.* Terminus seriei B indefinite sumtus per hypoth. est $\frac{2n-2.2n-3}{2}$ ∞ $\frac{4nn-4n}{2} - 3n + 3$ ∞ $\frac{n.n-1}{2}\,4 - \frac{n-1}{1}\,3$; tota ergo series B æquatur quadruplo omnium $\frac{n.n-1}{2}$, minùs triplo omnium $n-1$: sed novimus ex cap. 3. part. 2. $\frac{n.n-1}{2}$ esse numerum trigonalem, & $n-1$ lateralem; atque omn. $\frac{n.n-1}{2}$ ∞ $\frac{n+1}{1.2}$.

$\frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}$, & omn. $n-1 \infty \frac{n.n-1}{2}$; quare fit ſeries B ∞ $\frac{4.n+1.n.n-1}{1.2.3} - \frac{3.n.n-1}{2} \infty \frac{4n^3-9nn+5n}{6}$, ut antea.

Cùm itaque oſtenſum ſit, foliorum gemellorum caſus in ſingulis bigis eſſe $\frac{2n-2.2n-3}{2}$, in univerſis $\frac{4n^3-9nn+5n}{6}$; concludimus, lucrum œconomi ſpectatum in qualibet biga ſeorſim valere $\frac{2n-2.2n-3:2}{2n.2n-1.2n-2.2n-3:24} \infty \frac{6}{2nn-n}$ (*Tab.* 5.); in omnibus conjunctim $\frac{4n^3-9nn+5n:6}{2n.2n-1.2n-2.2n-3:24} \infty$ (divid. per $n.n-1:6$ ſeu $\frac{nn-n}{6}$) $\frac{4n-5}{2n-1.2n-3} \infty \frac{4n-5}{4nn-8n+3}$ (*Tab.* 1.). Porrò si unum 4 foliorum expoſitæ dignitatis in prima ſtatim biga primo loco prodierit, valoris adeò exiſtens imminuti per leg. 3. reliqua tria toties ordinem variare poſſunt, quot terniones reſidua $2n-1$ folia admittunt; unde naſcuntur $\frac{2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3}$ caſus, quibus lucrum œconomi triente mulctandum eſt; cujus propterea decrementum cenſetur $\frac{2n-1.2n-2.2n-3.1:18}{2n.2n-1.2n-2.2n-3:24} \infty \frac{2}{3n}$ (*Tab.* 2.). Hoc igitur detracto ex inventis tum $\frac{4n-5}{4nn-8n+3}$, tum $\frac{6}{2nn-n}$, remanet ex una parte $\frac{4nn+n-6}{12n^3-24nn+9n}$ (*Tab.* 3.) pro lucro reſiduo in bigis univerſis, ex altera $\frac{-4n+20}{6nn-3n}$ (*Tab.* 6.) pro damno ejus in prima ſeparatim.

Atque ita ſex Tabularum, quas dedit Auctor Gallus, quinque jam complevimus; ſupereſt unica reſtituenda, nempe 4ta, quæ lucrum œconomi continet in bigis reſiduis, quando prima earum ob conſpectum anterius ejus folium nulla eſt. Hæc verò ex iis, quæ IV. præcedd. articulis jam præmonſtrata ſunt, facillimè concinnabitur; modò ad hæc duo attendatur:

1. Quòd bigæ, cujus anterius folium conſpectum fuerit, poſterius aut erit expoſitæ dignitatis, aut non erit: ſi erit, nihil œconomo vel nocet vel prodeſt, ſed velut præcox ludo prorſus finem

imponit per leg. 2, si non erit, idem præcisè casuum numerus superest œconomo ad obtinendum depositum, seu ex asse seu ex besse, qui præstò esset, si biga illa quæ nulla est planè abesset; hac sola cum differentia, quòd numerus bigarum residuarum, qui alias diceretur n, ob alteram quæ nulla est una computatam nunc est tantùm $n-1$.

2. Quòd viso primo folio primæ bigæ, supersunt tantùm $2n-1$ folia non visa, adeò ut numerus omnium omninò casuum ex multitudine combinationum non omnium $2n$, sed tantùm $2n-1$ foliorum æstimari debeat. His enim perpensis facilè perspicitur ratio sequentis operationis:

Exscribantur ex præcedd. IV. §. fractiones Tabulæ primæ & 2dæ, sed quales erant ante reductionem, ita:

1. *Lucrum œconomi in bigis residuis, cùm omnes sunt valoris integri:*

$$\frac{1}{2n}.\quad \frac{n}{2n.2n-1:2}.\quad \frac{n.n-1}{2n.2n-1.2n-2:6}.\quad \frac{4n^3-9nn+5n:6}{2n.2n-1.2n-2.2n-3:24}.$$

2. *Decrementum lucri, cùm prima est valoris imminuti:*

$$\frac{1:3}{2n}.\quad \frac{2n-1:3}{2n.2n-1:2}.\quad \frac{2n-1.2n-2:6}{2n.2n-1.2n-2:6}.\quad \frac{2n-1.2n-2.2n-3:18}{2n.2n-1.2n-2:2n-3:24}.$$

Jam singulæ hæ fractiones mutentur in alias, surrogando tantùm ubique loco n in numeratoribus $n-1$ & loco $2n$ in denominatoribus $2n-1$; ut fiat

1. *Lucrum œconomi &c.*

$$\frac{1}{2n-1}.\quad \frac{n-1}{2n-1.2n-2:2}.\quad \frac{n-1.n-2}{2n-1.2n-2.2n-3:6}.\quad \frac{4n^3-21nn+35n-18:6}{2n-1.2n-2.2n-3.2n-4:24}.$$

2. *Decrementum lucri &c.*

$$\frac{1:3}{2n-1}.\quad \frac{2n-3:3}{2n-1.2n-2:2}.\quad \frac{2n-3.2n-4:6}{2n-1.2n-2.2n-3:6}.\quad \frac{2n-3.2n-4.2n-5:18}{2n-1.2n-2.2n-3.2n-4:24}.$$

Decrementis enim his respectivè ex lucro detractis, relinquuntur pro Tabula 4tâ fractiones:

$$\frac{2:3}{2n-1}.\quad \frac{n:3}{2n-1.2n-2:2}.\quad \frac{n.n-2:3}{2n-1.2n-2.2n-3:6}.\quad \frac{4n^3-15nn+11n+6:18}{2n-1.2n-2.2n-3.2n-4:24}.$$

seu facta reductione:

$$\frac{2}{6n-}.$$

$$\frac{2}{6n-3}.\quad \frac{n}{6nn-9n+3}.\quad \frac{nn-2n}{4n^3-12nn+11n-3}.\quad \frac{4nn-7n-3}{12n^3-36nn+33n-9}.$$

Et ſic quartam quoque Tabulam adornavimus. Quòd si quis D.ni Salvatoris Tabellas cum hiſce noſtris contulerit, deprehendet illas in quibusdam locis, præſertim ultimis, nonnihil emendationis indigere. Quæ vero ibidem obſervata adjiciuntur de proportione augmenti vel decrementi prærogativæ œconomi, prout numerus foliorum augetur minuiturve, de his & aliis dicere nil attinet, cùm ex inſpectione Tabularum cuivis ultrò manifeſta ſint.

PROBLEMA XXII.

Eſt Aleæ quoddam genus, in qua numerus omnium caſuum eſt a, *numerus quorundam ex iis* b, *cæterorum* a − b ∞ c. *Titius ſingulos aleæ jactus ſingulis nummis redimit Cajo perſolvendis; tum quoties unum* b *caſuum jecerit, à Cajo viciſſim accipiet* m *nummos, at quoties jecerit unum ex* c *caſibus, nihil habebit: tamen ſi unum* c *caſuum jecerit continuis* n *vicibus, Cajus ipſi omnes ſuos* n *nummos reddere obſtrictus eſt. Quæruntur ſortes Titii & Caji?*

Problema hoc in ſpeciem ſatis impeditum nihil admodum difficile habet, si dextrè tractetur. Incipio à fine, ponendo Titium jam decoxiſſe *n* — 1 nummos, hoc eſt, jam *n* — 1 vicibus jeciſſe unum *c* caſuum, & nunc in procinctu eſſe inſtituendi *n* jactum. Itaque vel unus *b* caſuum ipsi eveniet, vel rurſus unus *c* caſuum: si prius, à Cajo accipiet *m* nummos, qualium ipſe jam Cajo *n* perſolvit

ſolvit; ſic ut ipsi remaneat lucrum $m-n$ nummorum: si poſterius, recuperabit ex pacto omnes ſuos n nummos, nihilque adeò vel lucri vel damni faciet; unde lucrum ejus cenſebitur $\frac{b.\overline{m-n}+c.0}{a}$ $\infty\ \frac{\overline{m-n}.b}{a}$.

Pono deinde, ipſum luſiſſe $n-2$ vicibus, totiesque jeciſſe unum c caſuum, & nunc aggredi $n-1$ jactum: conſequetur à Cajo (si unum b caſuum jecerit) m nummos, qualium illi jam $n-1$ erogavit; adeoque pro lucro ſuo retinebit $m-n+1$: ſin denuò jecerit unum c caſuum, perveniet in eum ſtatum, qui in præced. hypoth. obtinebat, habebitque $\frac{\overline{m-n}.b}{a}$; quare jam ſors ejus ſit,

$$\frac{b.\overline{m-n.+1}+c.\overline{m-n}.b:a}{a}\ \infty\ \frac{\overline{m-n+1}\,ab+\overline{m-n}\,cb}{aa}.$$

Fingo porrò, jeciſſe $n-3$ vicibus unum c caſuum, & nunc ſe accingere ad jactum $n-2$; fiet, ut vel lucrum acquirat $m-n+2$ nummorum, qui ſibi, detractis quos Cajo ſucceſſivè numeravit $n-2$ nummis, remanent; ſi nempe unum b caſuum jecerit: vel ut pertingat in ſtatum præcedentis hypoth. si pergat jacere unum c caſuum; unde jam ſors ejus reſultat $\frac{b.\overline{m-n+2}+c.\text{præc.}}{a}\ \infty$

$$\frac{\overline{m-n+2}\,aab+\overline{m-n+1}\,acb+\overline{m-n}\,ccb.}{a3}$$

Suppono rurſus, jeciſſe $n-4$ vicibus unum c caſuum, & jamjam defuncturum $n-3$ jactu: perinde liquet, ac antea, eum habere b caſus ad obtinendum lucrum $m-n+3$ nummorum, qui ſibi, ablatis quos Cajo jam pendit $n-3$ nummis, relinquuntur; & c caſus ad perveniendum in ſtatum præced. id quod ſortem ipsi nunc parit $\frac{b.\overline{m-n+3}+c.\text{præc.}}{a}\ \infty$

$$\frac{\overline{m-n+3}\,a3b+\overline{m-n+2}\,aacb+\overline{m-n+1}\,accb+\overline{m-n}\,c3b}{a4}.$$

Atque ſic porrò retrogredi conveniret, ponendo Titium $n-5$, $n-6$ &c. jactus inſtituiſſe, ſi opus eſſet pergere ulterius; id verò non eſt neceſſe, cùm ex allatis ratio progreſſionis jam ſatis pateſcat: colli-

colligimus enim facilè, quòd ſors quam ab initio ludi habet, priusquam jacere inchoat, futura ſit:

$$\frac{\overline{m-1}\,a^{n-1}b+\overline{m-2}\,a^{n-2}cb+\overline{m-3}\,a^{n-3}ccb+\overline{m-4}\,a^{n-4}c^3b+\overline{m-5}\,a^{n-5}c^4b\ldots\ldots+\overline{m-n}\,c^{n-1}b}{a^n}\ \infty$$

(factâ ſeparatione terminorum diverſis ſignis affectorum)

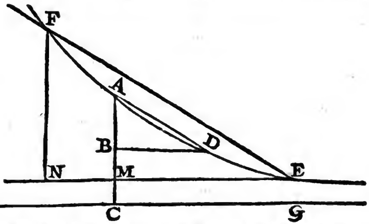
$$+mb \text{ in } \overline{\frac{1}{a}+\frac{c}{aa}+\frac{cc}{a^3}+\frac{c^3}{a^4}+\frac{c^4}{a^5}\ldots\ldots+\frac{c^{n-1}}{a^n}}$$

$$-b \text{ in } \overline{\frac{1}{a}+\frac{2c}{aa}+\frac{3cc}{a^3}+\frac{4c^3}{a^4}+\frac{5c^4}{a^5}\ldots\ldots+\frac{nc^{n-1}}{a^n}}$$

quam quantitatem liquet duabus conſtare partibus, priore affirmata, poſteriore negata, quarumque illa in ſerie geometricè progreſſionalium, hæc in ſerie ex geometricè & arithmeticè progreſſionalibus mixta conſiſtit: Utriuſque ſumma per notas regulas habetur: illius $\frac{m.\,a^n-c^n}{a^n}$, hujus $\frac{a^n-c^n}{a^{n-1}b}-\frac{nc^n}{a^n}$; quarum proinde differentia quæſitum exprimit, lucrum vid. reſpectu Titii, & damnum reſpectu Caji, ſi pars affirmata præpolleat negatæ; damnum verò ex parte Titii & lucrum ex parte Caji, ſi hæc prævaleat illi.

Unde jam porrò ſequitur, quòd ſi ponatur æqualitas inter utramque, determinari poſſit, quis valor ſtatui debeat literæ *m* vel *n*, ut ſortes Caji & Titii æquentur: Facta enim æquatione $\frac{m.\,a^n-c^n}{a^n}\ \infty\ \frac{a^n-c^n}{a^{n-1}b}-\frac{nc^n}{a^n}$, inſtituatur diviſio per $\frac{a^n-c^n}{a^n}$, & prodibit $m\ \infty\ \frac{a}{b}-\frac{nc^n}{a^n-c^n}$. Si verò data *m*, quæratur *n*: ordinetur æquatio ita,

$\frac{nc^n}{a^n - c^n} \infty \frac{a}{b} - m$, ac fiat $a^n - c^n . c^n :: n . \frac{a}{b} - m :: bn . a - bm$, & componendo $a^n . c^n :: a - bm + an . a - bm$; eruntque aggregata ex logarithmis extremorum & mediorum æqualia, nimirum $nla + l\overline{a - bm} \infty nlc + l\overline{a - bm + bn}$, h. e. $nla - nlc \infty l\overline{a - bm + bn} - l\overline{a - bm}$, & $n \infty \frac{l\overline{a - bm + bn} - l\overline{a - bm}}{la - lc}$, seu (posito $b \infty 1$) $n \infty \frac{l\overline{a - m + n} - l\overline{a - m}}{la - lc}$; quod per Logarithmicam ita facilè construo:



In quacunque Logarithmica F A D E secetur applicata quælibet A C in B, ut A B sit ad B C in ratione b ad c, sumtaque A B loco unitatis, in eadem A C abscindatur A M ∞ m, per B & M agantur rectæ B D, M E, parallelæ axi C G, & occurrentes curvæ in D & E; junctæque A D ducatur parallela E F secans curvam in F, ac denique ex F demittatur applicata F N occurrens productæ E M in N; erit F N valor optati numeri n.

Proponatur in exemplum hæc Alea: Titius duabus tesseris duos senarios jacere contendit, nummoque in jactum persoluto postulat à Cajo, ut sibi vicissim sex nummi numerentur, si id præstiterit; si secus faxit, nihil; attamen si vicies continuò scopo aberrarit, ut sibi omnes sui 20 nummi restituantur. Hic propter 36 casus duarum tesserarum, interque hos unicum qui duos senarios advehat, litera-

rum

rum valor est, $a \infty 36$, $b \infty 1$, adeoque $c \infty 35$; nec non $m \infty 6$, & $n \infty 20$. Nunc autem per logarithmos compendiosè invenitur vicesima potestas ipsius $\frac{c}{a}$, seu $\frac{c^n}{a^n} \infty \frac{5693}{10000}$; proinde $\frac{m.a^n - c^n}{a^n}$ $\infty m.1 - \frac{c^n}{a^n} \infty 6.\frac{4307}{10000} \infty \frac{25842}{10000}$; & pari modo altera pars $\frac{a^n - c^n}{a^{n-1}b}$ $- \frac{nc^n}{a^n} \infty \frac{a}{b} - \frac{a}{b} - n\frac{c^n}{a^n} \infty 36 - \frac{56.5693}{10000} \infty 36 - \frac{318808}{10000} \infty \frac{41192}{10000}$; quæ cùm priorem excedat tota quantitate $\frac{15350}{10000} \infty \frac{307}{200}$, paulò adhuc majore quàm $\frac{3}{2}$, innuit, Titium non sine detrimento hanc aleam subire posse, & satius facturum si exemptionem statim à ludendi necessitate vel sesquinummo redimat. Quòd si tamen vel m augeretur, vel minueretur n, posset alea sic attemperari, ut neuter præ altero quicquam prærogativæ haberet; nam si retento $n \infty 20$ fiat $m \infty 9\frac{2429}{4307}$, aut manente $m \infty 6$ statuatur $n \infty 11$ aut 12, utriusque sors propemodùm ad æqualitatem redacta erit.

Observo generaliter in hujusmodi alea sequentia:

1. Quòd si datis a, b, c & m, litera n successivè induit valores numerorum 1, 2, 3, 4 &c. lucrum Titii (utpote cujus sors in casu $n \infty 1$ semper est potior sorte Caji) aliquousque ubinde crescit.

2. Quòd ejus conditio optima sit, cùm ponitur $n \infty m - 1$ vel m; & quidem perpetuò eadem in utraque hypothesi.

3. Quòd crescente n ulterius, decrescat illa porrò continuò in infinitum, usque eò ut & lucrum sæpè in damnum abeat, prævalente deinceps sorte Caji.

4. Quòd lucrum vel damnum obtinens in hypothesi numeri n valdè magni & velut infiniti, ad illud quod obtinet respectu unici jactus (rejecta illa postrema conditione de restituendis Titio suis nummis, si continuis n jactibus nullus b casuum evenerit), rationem semper habet, ut a ad b, majoris ad minus; nimirum cùm istud per Cor. 6. Prop. III. part. 1. fiat $\frac{b.\overline{m-1} + c.\overline{-1}}{a} \infty \frac{bm - b - c}{a} \infty \frac{bm - a}{a}$,

 erit

erit illud $\frac{bm - a}{b}$; & quidem utrumque simul vel lucrum ratione Titii & damnum ratione Caji, vel vicissim, prout *bm* majus minusve ponitur ipso *a*.

PROBLEMA XXIII.

De Alea Tesserarum cæcarum (blinde Würffel.)

Sic vocant sex illas Tesseras, circulatoribus plerunque nostris solennes, quæ cùm sint cubiformes ut ordinariæ, exoculatæ tamen velut apparent, & singulæ in una duntaxat hedra punctis notatæ, una scil. unico, alia duobus, tertia tribus, usque ad sextam, quæ unam hedrarum sex punctis signatam habet; sic ut universis non nisi $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \infty 21$ puncta inveniantur. Ejusmodi Tesseras impostores emunctui plebeculam in foro exponunt una cum præmiis secundùm omnes punctorum numeros ab 1 usque ad 21, quanta circiter subjunctæ Tabulæ inserta videntur. Tum qui fortunam suam periclitari voluerit, nummo circulatori persoluto tesseras istas in alveum projicit, & si quem punctorum jecerit numerum, huic assignatum præmium aufert; si verò nullum sibi punctum ceciderit, nummi sui jacturam facit.

His positis, qui sortem horum Aleatorum investigare cupit, notare debet sequentia:

1. Quòd numerus omnium casuum in sex ejusmodi tesseris, non secus atque in tesseris ordinariis, per ea quæ part. 1. post Propos. IX. ostensa sunt, sit 46656, quanta nim. est sexta potestas senarii.

2. Quòd numerus eorum casuum, qui nullum omnino punctum advehunt, determinetur per sextam potestatem quinarii, quæ est 15625; quoniam in quavis tessera quinque sunt hedræ punctis orbatæ, quarum quælibet cum qualibet quinque hedrarum alterius tesseræ combinari, & harum combinationum quælibet rursus cuili-

bet 5

bet 5 hedrarum tertiæ adjungi potest; ita ut præcedentium casuum numerus accessione novæ tesseræ semper quintuplicetur.

3. Quòd quivis punctorum numerus vel ab una, vel à duabus pluribusve tesseris efficiatur: si ab una efficitur, in cæteris quinque tesseris nullum comparebit punctum; quare cùm singularum etiam quinque sint hedræ punctis destitutæ, numerus casuum, quibus id accidit, designabitur per 3125 quintam potestatem quinarii: si numerus punctorum à duabus producitur tesseris, in cæteris quatuor nulla eminebunt puncta; unde nunc propter eandem rationem numerus casuum, quibus id fit, erit 625 quarta potestas quinarii. Et pariter, si à tribus, 4 aut 5 tesseris constituitur, in cæteris tribus, duabus aut una tesseris puncta deficient; unde tum numeri casuum erunt 125, 25, aut 5, id est, 3tia, 2da aut prima potestas quinarii.

4. Quòd idem punctorum numerus non tantùm à pluribus & paucioribus plerunque tesseris, sed & ab eodem tesserarum numero pluribus quandoque modis produci potest: sic puncta XII tribus modis produci possunt à tribus, & duobus modis à 4 tesseris; nam trium tesserarum puncta poterunt esse vel 1, 5, 6; vel 2, 4, 6; vel 3, 4, 5; & quatuor tesserarum puncta vel 1, 2, 3, 6; vel 1, 2, 4, 5.

Ut verò nulli modorum prætereantur, quibus componi possunt punctorum numeri, eadem ferè, quam supra in Probl. XVII. adhibuimus, methodo utemur. Scriptis ordine punctorum numeris ab I usque ad XXI, sumo omnes combinationes sex primarum notarum numeralium tum singularum 1, 2, 3, 4, 5, 6; tum binarum 1 + 2, 1 + 3, 1 + 4, &c. item 2 + 3, 2 + 4, &c. 3 + 4, &c. &c. tum ternarum 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 4, &c. quaternarum, quinarum, & tandem senarum 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6, ponendo confestim singulas ad latus ejus numeri, quem summa combinatarum notarum efficit: sic quia biniones 1 + 2, 1 + 3, 1 + 4 &c. efficiunt 3, 4, 5 &c. scribo illos ad latus punctorum III, IV, V &c. atque ita in cæteris omnibus. Hoc peracto casuum numeros, qui singulis punctorum numeris respondent, facillimè determino, numerando solummodo pro unoquoque modorum, quo illi producuntur ab una tessera 3125; pro unoquoq; quo producuntur à tesseris duabus, 625;

Tabula Tesserarum cæcarum:

Puncta:		Casus:	Præmia:
0	— — — — — — — — —	15625	0
I	∞ 1 — — — — — — — —	3125	1
II	∞ 2 — — — — — — — —	3125	1
III	∞ 3 ∞ 1+2 — — — — — — —	3750	1
IV	∞ 4 ∞ 1+3 — — — — — — —	3750	1
V	∞ 5 ∞ 1+4 ∞ 2+3 — — — — — —	4375	1
VI	∞ 6 ∞ 1+5 ∞ 2+4 ∞ 1+2+3 — — — —	4500	1
VII	∞ 1+6 ∞ 2+5 ∞ 3+4 ∞ 1+2+4 — — — —	2000	1
VIII	∞ 2+6 ∞ 3+5 ∞ 1+2+5 ∞ 1+3+4 — — —	1500	1
IX	∞ 3+6 ∞ 4+5 ∞ 1+2+6 ∞ 1+3+5 ∞ 2+3+4 — —	1625	2
X	∞ 4+6 ∞ 1+3+6 ∞ 1+4+5 ∞ 2+3+5 ∞ 1+2+3+4 —	1025	2
XI	∞ 5+6 ∞ 1+4+6 ∞ 2+3+6 ∞ 2+4+5 ∞ 1+2+3+5 —	1025	2
XII	∞ 1+5+6 ∞ 2+4+6 ∞ 3+4+5 ∞ 1+2+3+6 ∞ 1+2+4+5	425	2
XIII	∞ 2+5+6 ∞ 3+4+6 ∞ 1+2+4+6 ∞ 1+3+4+5 — —	300	2
XIV	∞ 3+5+6 ∞ 1+2+5+6 ∞ 1+3+4+6 ∞ 2+3+4+5 —	200	3
XV	∞ 4+5+6 ∞ 1+3+5+6 ∞ 2+3+4+6 ∞ 1+2+3+4+5 —	180	3
XVI	∞ 1+4+5+6 ∞ 2+3+5+6 ∞ 1+2+3+4+6 — — —	55	3
XVII	∞ 2+4+5+6 ∞ 1+2+3+5+6 — — — —	30	4
XVIII	∞ 3+4+5+6 ∞ 1+2+4+5+6 — — — —	30	5
XIX	∞ 1+3+4+5+6 — — — — — —	5	12
XX	∞ 2+3+4+5+6 — — — — — —	5	45
XXI	∞ 1+2+3+4+5+6 — — — — — —	1	90
	Summa Casuum —	46656	

& quo

♃

Expon:	*Poteſt:*	
1	5	6
2	25	36
3	125	216
4	625	1296
5	3125	7776
6	15625	46656

& quo à tribus, 4 aut 5 teſſeris, 125, 25 aut 5; ut ſupra in obſervat. 3. dictum: ſic quia puncta XII tribus modis à tribus, & 2 modis à 4 teſſeris componi oſtenſum eſt, numerus caſuum, quibus XII puncta eveniunt, erit ter 125 + bis 25 ∞ 425, quem in adjuncta Tabula adſcribo. Quòd ſi ubique ſimiliter operatus fuero, & numeri omnium caſuum in ſummam collecti conſtituant 46656 ſextam poteſtatem ſenarii, certus ero me nullum modorum præteriiſſe.

Abſoluta autem hacce Tabula ſumma rei peracta eſt, nec ſupereſt aliud, quam ut ſinguli caſuum numeri in ſua reſpectivè præmia ducantur, & productorum aggregatum per 46656 dividatur ad obtinendam optatam Aleatoris ſortem, quæ hac ratione fiet

$$\frac{15625.0 + 26125.1 + 4400.2 + 435.3 + 30.4 + 30.5 + 5.12 + 5.45 + 1.90}{46656}$$

∞ $\frac{36875}{46656}$; ita ut tantùm ipſi deponendum fuiſſet $\frac{36875}{46656}$ unius nummi, ſi æqua ſorte ludere voluiſſet; quare cùm circulatori penderit integrum; reliquum nummi $\frac{9781}{46656}$ in ejus damnum & contra deceptoris lucrum computatur.

PRO-

PROBLEMA XXIV.

Positis & repetitis, quæ in præcedenti, si Dominus Aleæ ita paciscatur cum collusore, ut ille obstrictus velit esse ad restituendum huic omnes suos nummos, si quinque continuis jactibus nullum ipsi punctum ceciderit Quæritur nunc utriusque sors?

Vidi quondam Circulatorem, qui adstantes ut inescaret, hanc insuper conditionem iis offerebat, eoque tum ansam mihi dedit cogitandi primùm de Problemate supra proposito XXII. Hujus itaq; solutio cùm ibid. generaliter exhibita sit, nihil nobis hîc pensi restat, quam ut illam literis ad numeros revocatis huc applicemus: Constat ex præced. numerum omnium casuum in sex cæcis tesseris esse 46656, numerum eorum quibus nullum emicat punctum 15625, cæterorum 31031; unde valores literarum in re præsenti sunt, $a \propto 46656$, $b \propto 31031$, $c \propto 15625$; nec non per hypoth. $n \propto 5$; & valor ipsius m, qui varius est, per Cor. 3. Prop. III. part. 1. ad medium reductus fit $\propto \frac{36875}{31031}$, quandoquidem 31031 casus ad $\frac{36875}{31031}$, & 15625 casus ad o, eandem collusori expectationem $\frac{36875}{46656}$ pariunt, quam habere deprehensus est in præcedenti. En tibi jam calculum:

$a \propto 46656$

$a \infty 46656$ . . . . . . $la \infty 4.6689075$

$c \infty 15625$ . . . . . . $lc \infty 4.1938200$

$\frac{a}{b} \infty \frac{46656}{31031}$ $l\frac{c}{a} \infty lc - la \infty -0.4750875$

$m \infty \frac{36875}{31031}$ $n \infty$ . . . 5

$\frac{a}{b} - m \infty \frac{9781}{31031} \infty \frac{31520}{100000}$ $nl\frac{c}{a} \infty l\frac{c^n}{a^n} \infty -2.3754375$

$\frac{a}{b} - m + n \infty \frac{9781}{31031} + 5 \infty \frac{164936}{31031}$ . . $l\overline{\frac{a}{b} - m + n} \infty 0.7255196$

$\frac{a}{b}\overline{-m+n}, \frac{c^n}{a^n} \infty \frac{2239}{100000}$. $l\overline{\frac{a}{b} - m + n} + l\frac{c^n}{a^n} \infty -1.6499179$

Quare, $\frac{m.\overline{a^n - c^n}}{a^n} - \frac{a^n + c^n}{a^{n-1}b} + \frac{nc^n}{a^n}$ ($\infty m - \frac{mc^n}{a^n} - \frac{a}{b} + \frac{ac^n}{ba^n} + \frac{nc^n}{a^n} \infty$
$m - \frac{a}{b} + \overline{\frac{a}{b} - m + n}, \frac{c^n}{a^n}$) $\infty \frac{-31520}{100000} + \frac{2239}{100000} \infty -\frac{29281}{100000}$.

Oſtenſum autem eſt in Probl. XXII, hac quantitate exprimi damnum colluſoris, quod quidem in præced. Probl. tantùm erat $\frac{9781}{46656} \infty \frac{20964}{100000}$, ſeſquialtero ferè minus: unde conditionem hanc de reddendis colluſori ſuis nummis, quam veterator in ejus favorem adjeciſſe videtur, in majus potius illius damnum vergere conſtat. De cætero & hoc obſervo, quòd etiamsi circulator poſt duos ſtatim continuos inanes jactus ad reſtituendum ſe obſtringere vellet, illud cum aliquali adhuc lucro pro ſe facere poſſet.

ARTIS CONJECTANDI
PARS QUARTA,
tradens
Uſum & applicationem præcedentis Doctrinæ in Civilibus, Moralibus & Oeconomicis.

CAPUT I.
Præliminaria quædam de Certitudine, Probabilitate, Neceſſitate & Contingentia Rerum.

CErtitudo rei cujusvis ſpectatur vel *objectivè* & in ſe; nec aliud ſignificat, quàm ipſam veritatem exiſtentiæ aut futuritionis illius rei: vel *ſubjective* & in ordine ad nos; & conſiſtit in menſura cognitionis noſtræ circa hanc veritatem.

Omnia, quæ ſub Sole ſunt vel fiunt, præterita, præſentia ſive futura, in ſe & objectivè ſummam ſemper certitudinem habent. De præſentibus & præteritis conſtat; quoniam eo ipſo, quo ſunt vel fuerunt, non poſſunt non eſſe vel fuiſſe: Nec de futuris ambigendum, quæ pariter etſi non fati alicujus inevitabili neceſſi-

cessitate, tamen ratione tum præscientiæ tum prædeterminationis divinæ non possunt non fore; nisi enim certò eveniant quæcunque futura sunt, non apparet, quo pacto summo Creatori omniscientiæ & omnipotentiæ laus illibata constare queat. Quomodo autem hæc futuritionis certitudo cum contingentia aut libertate causarum secundarum consistere possit, de hoc disputent alii; nos à scopo nostro aliena nolumus tangere.

Certitudo rerum, spectata in ordine ad nos, non omnium eadem est, sed multipliciter variat secundùm magis & minus. Illa de quibus revelatione, ratione, sensu, experientia, αὐτοψίᾳ aut aliter ita constat, ut de eorum existentia vel futuritione nullo modo dubitare possimus, summa & absoluta certitudine gaudent. Cætera omnia imperfectiorem ejus mensuram in mentibus nostris obtinent, majorem minoremve, prout plures vel pauciores sunt probabilitates, quæ suadent rem aliquam esse, fore aut fuisse.

Probabilitas enim est gradus certitudinis, & ab hac differt ut pars à toto. Nimirum si certitudo integra & absoluta, quam litera *a* vel unitate 1 designamus, quinque verb. gr. probabilitatibus ceu partibus constare supponatur, quarum tres militent pro existentia aut futuritione alicujus eventus, reliquæ contra: eventus ille dicetur habere $\frac{3}{5}a$, seu $\frac{3}{5}$ certitudinis.

Illud igitur altero *probabilius* vocatur, quod majorem certitudinis partem habet; etsi in positivo *probabile* ex usu loquendi tantùm dicatur id, cujus probabilitas semissem certitudinis notabiliter superat. Dico, *notabiliter*; nam quod semissem certitudinis circiter æquat, *dubium* vel anceps vocatur. Ita probabilius est, quod $\frac{1}{5}$ certitudinis habet, quàm quod $\frac{1}{15}$; etsi neutrum in positivo sit probabile.

Possibile est, quod vel tantillam certitudinis partem obtinet: Impossibile, quod nullam aut infinitè exiguam. Ita possibile est, quod habet $\frac{1}{20}$ aut $\frac{1}{30}$ certitudinis.

Moraliter certum est, cujus probabilitas ferè æquatur integræ certitudini, sic ut defectus sentiri non possit: *Moraliter impossibile* contra, quod tantum duntaxat probabilitatis habet, quantum moraliter certo ad omnimodam certitudinem deest. Ita si pro moraliter

certo habeatur, quod $\frac{999}{1000}$ certitudinis possidet, erit moraliter impossibile, quod ejus tantùm habet $\frac{1}{1000}$.

Necessarium est, quod non potest non esse, fore aut fuisse; idque *necessitate* vel *physica*: quo pacto necessum est ignem urere, triangulum habere tres angulos æquales duobus rectis, plenilunium, quod Luna existente in nodis ingruit, esse eclipticum: vel *hypothetica*, qua unumquodq; dum est aut fuit, vel esse aut fuisse supponitur, non potest non esse aut fuisse; quo sensu necessum est Petrum scribere, quem scio ponoq; scribere: vel denique *necessitate pacti* seu *instituti*, quo pacto aleator, qui tessera senarium jecerit, necessario vincere dicitur, si prius inter lusores ita conventum fuerit, ut jactu senarii victoria constet.

Contingens (tam *liberum*, quod ab arbitrio creaturæ rationalis: quàm *fortuitum* & *casuale*, quod à casu vel fortuna dependet) est id, quod posset non esse, fore aut fuisse; intellige potentia remota, non proxima: nec enim contingentia semper omnem necessitatem, etiam quoad causas secundas, excludit; quod exemplis declaro. Certissimum est, quòd data tesseræ positione, velocitate & distantia ab alveo, eo momento quo manum projicientis deserit, tessera non potest aliter cadere, quàm uti revera cadit: item, quod data aëris constitutione præsente, datisque ventorum, vaporum, nubium mole, situ, motu, directione, velocitate & mechanismi legibus, quibus hæc omnia in se invicem agunt, tempestas crastinæ diei non possit alia fore, quàm qualis reapse futura est; adeo ut hi effectus ex suis causis proximis non minus necessario, atque Eclipsium phænomena ex luminarium motu sequantur: & tamen usus obtinuit, ut solæ Eclipses necessariis, casus vero tesseræ & tempestatis futuritio contingentibus annumerentur; cujus rei non alia ratio est, quàm quòd ea, quæ ad determinandos posteriores effectus ut data supponuntur, atque etiam in natura talia sunt, non satis tamen nobis sint cognita; nec si essent, satis excultum Geometriæ & Physicæ studium, ut ex datis effectus hi calculo subduci possint; quemadmodum ex perspectis Astronomiæ principiis supputari & prædici possunt Eclipses: quæ propterea & ipsæ, ante Astronomiam eo perfectionis promotam, non minus ac cætera duo inter futura contingentia referri opus habebant. Sequitur hinc, uni & uno tempore videri posse contingens, quod alii

(imo

(imò & eidem) alio tempore post cognitas ejus causas sit necessarium; adeo ut contingentia præcipuè etiam respiciat cognitionem nostram, in quantum nos nullam videmus repugnantiam in objecto ad non esse vel fore, etiamsi hic & nunc vi causæ proximæ sed nobis ignotæ necessario sit vel fiat.

Fortuna prospera, un Bonheur, ein Glück/ & *Fortuna adversa, un Malheur*, ein Unglück dicitur, cùm nobis bonum vel malum obtingit non quodvis, sed quod probabilius, aut saltem æquè probabiliter, poterat non obtigisse; eoque proinde melior vel pejor fortuna, quo minus probabile erat, bonum vel malum hoc eventurum. Sic insigniter fortunatus est ille, qui terram fodiendo thesaurum invenit; quoniam millies fodiendo ne semel hoc accidit. Si viginti desertores, quorum unus cæteris in exemplum suspendio necandus, alea de vita contenderint: propriè non fortunati dicuntur illi novendecim, qui benigniore sorte sunt usi, sed infortunatissimus ille vicesimus, cui sors atra cecidit. Ita nec fortunatus prædicandus amicus tuus, qui è prælio salvus evasit, in quo exigua præliantium pars occubuit; nisi fortassis ob excellentiam boni, quod in vitæ conservatione consistit, ita vocandum existimes.

CAP. II.

De Scientia & Conjectura. De Arte Conjectandi. De Argumentis Conjecturarum. Axiomata quædam generalia huc pertinentia.

Ea quæ certa sunt & indubia, dicimur *scire* vel *intelligere*: cætera omnia *conjicere* tantùm vel *opinari*.

Conjicere rem aliquam est metiri illius probabilitatem: ideoque *Ars Conjectandi* sive *Stochastice* nobis definitur ars metiendi quàm fieri potest exactissimè probabilitates rerum, eo fine, ut in judiciis & actionibus nostris semper eligere vel sequi possimus id, quod melius, satius, tutius aut consultius fuerit deprehensum; in quo solo omnis Philosophi sapientia & Politici prudentia versatur.

Probabilitates æſtimantur ex *numero* ſimul & *pondere argumentorum*, quæ quoquo modo probant vel indicant, rem aliquam eſſe, fore aut fuiſſe. Per *Pondus* autem intelligo vim probandi.

Argumenta ipſa ſunt vel *intrinſeca*, vulgò artificialia, deſumta ex locis topicis cauſæ, effectus, ſubjecti, adjuncti, ſigni aut alterius cujusvis circumſtantiæ, quæ qualemcunque nexum cum re probanda habere videtur: vel *extrinſeca* & inartificialia, petita ab authoritate & teſtimonio hominum. Exemplum eſto: Titius occiſus reperitur in viâ, Mævius commiſſi homicidii accuſatur; Argumenta accuſationis ſunt, 1. quòd conſtet illum odio habuiſſe Titium (en argumentum à *cauſa*, potuit enim odium hoc ipſum impuliſſe ad occidendum). 2. quòd examinatus palluerit timideque reſponderit (en argumentum ab *effectu*; poteſt enim pallor & metus iſte ex conſcientia patrati criminis profluxiſſe). 3. quòd in ædibus Mævii repertus mucro ſanguine tinctus (en *ſignum*). 4. quòd quo die occiſus in via Titius, eodem illac tranſierit Mævius (en *circumſtantiam* loci & temporis). 5. quòd denique Cajus deponat, pridie commiſſi homicidii Titio cum Mævio lites interceſſiſſe (en *teſtimonium*).

Priusquam autem propius ad inſtitutum accedamus, oſtendendo, quomodo his argumentis conjecturarum in probabilitatibus metiendis uti conveniat, præmittere lubet generales quasdam Regulas ſeu Axiomata, quæ unicuique ſanæ mentis homini ſimplex ratio dictare ſolet, & quæ in vitæ civilis uſu à prudentioribus etiam perpetuò obſervantur.

1. *Conjecturis locus non eſſe debet in rebus, in quibus omnimodam certitudinem aſſequi licet.* Fruſtra proin eſſet Aſtronomus, qui ex eo quòd quotannis duas vel tres contingere novit Eclipſes, de Plenilunio quodam augurari vellet, num ſit eclipticum, necne; cùm veritatem rei certo calculo conſequi poſſit. Ita ſi fur interrogatus reſponderit, ſe rem ablatam vendidiſſe Sempronio, ineptè ageret Judex, qui ex vultu tonoque loquentis, aut ex qualitate rei furto ablatæ aliisve furti circumſtantiis de probabilitate aſſerti conjicere vellet, quando præſtò eſt Sempronius, è quo rem omnem certò & facilè experiri licebit.

2. *Non ſufficit expendere unum alterumve argumentum, ſed conquirenda*

quirenda sunt omnia, quæ in cognitionem nostram venire possunt, atq; ullo modo ad probationem rei facere videntur. Tres naves ex. gr. solvunt è portu, post aliquod tempus nunciatur, unam illarum naufragio periisse; conjicitur quænam? si solum numerum navium spectarem, infortunium singulis æquè accidere potuisse colligerem; sed quia memini, unam earum præ cæteris carie & vetustate fuisse exesam, velis & antennis malè armatam, nauclero quoque novitio & inexperto instructam, hanc utique probabilius quàm cæteras interiisse judico.

3. *Nec tantùm illa sunt attendenda, quæ rei probandæ conducunt; sed & omnia illa, quæ in contrarium adduci possunt, ut trutinatis probè utrisq; constet utra præponderent.* De amico diutissimè à patria absente quæritur, an pro mortuo declarari possit? Pro affirmativa militant hæc argumenta: Quòd omni licet adhibita cura toto vicennio nihil de illo innotuit: quòd peregrinantes plurimis vitæ periculis expositi sunt, quibus exempti hi qui domi manent; fortè igitur in undis finiit vitam, fortè occisus in via, fortè in prælio, fortè morbo aut casu aliquo obiit in loco, ubi nemini fuit notus: quòd si in vivis esset, ejus jam ætatis esse deberet, quam pauci vel domi attingunt: quòd scripturus fuisset, etiamsi in extremis Indiæ oris versaretur, quia scivit se hæreditatem expectare domi: & quæ sunt alia. Quibus tamen argumentis non est acquiescendum, sed opponenda quoque sequentia, quæ negativam tuentur. Constat, hominem fuisse socordem, ægrè arripuisse calamum, amicos contempsisse; fortè à Barbaris captivus ductus, ut scribere non potuerit; fortè etiam scripsit ex India aliquoties, sed literæ vel incuria latorum vel naufragio periêre; constat denique, multos diutius emansisse, & tamen tandem rediisse incolumes.

4. *Ad judicandum de universalibus sufficiunt argumenta remota & universalia; sed ad conjecturas formandas de individuis, propiora quoq; & specialia adjungenda sunt, si modo haberi possunt.* Ita cùm quæritur in abstracto, quantò sit probabilius, juvenem viginti annorum seni sexagenario fore superstitem, quàm verò hunc illi, præter discrimen ætatis & annorum nihil est, quod considerare possis; sed ubi specialiter sermo est de individuis Petri juvenis & Pauli senis, attendere insuper oportet ad specialem eorum complexionem & studium, quo uterque vale-

valetudinem ſuam curat; nam ſi Petrus ſit valetudinarius, ſi affectibus indulgeat, ſi intemperanter vivat, fieri poteſt, ut Paulus, etsi ætate provectior, optima tamen ratione longioris ſpem vitæ concipere valeat.

5. *In rebus incertis & dubiis actiones noſtræ ſuſpendendæ ſunt, donec major lux affulſerit; ſed ſi occaſio agendi nullam patiatur moram, inter duo ſemper eligendum id, quod convenientius, tutius, conſultius aut probabilius videtur, etſi neutrum in poſitivo tale ſit.* Sic in oborto incendio, è quo aliter elabi non poſſis, nisi vel ex ſummo tecto vel ex inferiore quadam contignatione te præcipitem des, præſtabit poſterius eligere, quia tutius; etsi neutrum ſimpliciter tutum ſit, aut ſine læſionis periculo fieri poſſit.

6. *Quod aliquo caſu prodeſſe, nullo nocere poteſt, præferendum eſt illi, quod nullo vel prodeſt vel nocet;* quorſum collimat illud, quod vernaculè dicimus: Hilfft es nicht / so schadt es nicht. Fluit ex præcedenti; nam quod prodeſſe poteſt, cæteris paribus ſatius, tutius, optabilius eſt illo, quod non poteſt.

7. *De Actionum humanarum pretio non ſtatuendum ex eventu;* cùm ſtolidiſſimæ actiones quandoque optimo, prudentiſſimæ contra peſſimo ſucceſſu fruantur; hinc Poëta: *Careat ſucceſſibus, opto, quiſquis ab eventu facta notanda putat.* Ita ſi quis tribus teſſeris prima vice tres ſenarios jacere ſuſcipit, etiamsi fortaſſe vincat, ſtolidè tamen egiſſe cenſetur. Notandum contra perverſa vulgi judicia, cui præſtantior habetur, quò quiſque eſt fortunatior; imò cui proſperum ac felix ſcelus plerunque virtus vocatur, de quo rurſum eleganter Ovvenus:

Epigr. lib. ſing. §. 216.

Quòd malè conſultum cecidit feliciter, Ancus
  Arguitur ſapiens, qui modo ſtultus erat;
Quod prudenter erat proviſum, ſi malè vortat,
  Ipſe Cato populo judice ſtultus erit.

8. *In judiciis noſtris cavendum, ne rebus plus tribuamus quàm par eſt, neque quod probabilius eſt cæteris, pro abſolutè certo habeamus ipſi aut obtrudamus aliis.* Oportet enim, ut fides, quam rebus tribuimus, proportionata

tionata sit gradui certitudinis, quam unaquæque res obtinet atque adeo in eadem ratione minor, qua minor est ipsa rei probabilitas; quod vernaculè sic enunciamus; Man muß ein jedes in seinem Werth und Unwerth beruhen lassen.

9. *Quia tamen rarò admodum omnimodam certitudinem assequi licet, necessitas & usus volunt, ut quod moraliter tantùm certum est, pro absolutè certo habeatur.* Utile proin esset si Magistratus auctoritate morali certitudini determinati limites constituerentur; putà si definiretur, num ad illam efficiendam sufficiant $\frac{99}{100}$, an requirantur $\frac{999}{1000}$ certitudinis; ne partium studio aliquid dare possit Judex, sed cynosuram habeat, quam in ferenda sententia constanter observet.

Plura ejusmodi Axiomata alia unusquisque quotidiano rerum usu edoctus proprio marte sibi cudere poterit, quorum omnium nos extra datam occasionem difficulter meminisse possemus.

CAPUT III.

De variis argumentorum generibus, & quomodo eorum pondera æstimentur ad supputandas rerum probabilitates.

Qui varia argumenta examinat, quibus opinio vel conjectura generatur, triplex in iis discrimen animadvertet: nam quædam eorum *necessariò existunt & contingenter indicant*: alia *contingenter existunt & necessariò indicant*: alia denique *contingenter existunt simul & indicant*. Discrimen declaro exemplis: Frater meus diu nihil ad me literarum dedit; dubito, an ejus segnities aut negotia in culpa sint; vereor etiam ne planè fato concesserit. Hic intermissæ scriptionis argumenta sunt tria: *Segnities*, *Mors* & *Negotia*; quorum primum existit necessariò, (necessitate hypothetica, quia fratrem scio ponoq; segnem esse) sed indicat contingenter; potuisset enim segnities hæc ipsum non cohibere à scribendo: secundum contingenter existit, (potest enim frater adhuc in vivis esse) at necessariò indicat, cùm mortuus

ſcribere non poſſit: tertium & contingenter exiſtit & contingenter indicat; poſſet enim ille habere & non habere negotia, & ſi quæ habet, poſſunt tanta non eſſe, quæ ipſum de ſcriptione detineant. Aliud exemplum: Pono aleatorem, cui ex ludi præſcripto præmium debeatur, ſi teſſeris duabus ſeptem puncta jecerit, voloque conjicere, quam talis vincendi ſpem habeat. Hic argumentum victoriæ eſt jactus ſeptenarii, qui illam indicat neceſſariò, (neceſſitate nimirum pacti inter colluſores initi) ſed tantùm exiſtit contingenter; cùm præter ſeptenarium & alii punctorum numeri cadere poſſint.

Præter hanc argumentorum diſtinctionem aliud quoque in iis diſcrimen obſervare licet, dum quædam eorum ſunt *pura*, alia *mixta*. *Pura* voco, quæ in quibusdam caſibus ita rem probant, ut in aliis nihil poſitivè probent: *Mixta*, quæ ita rem probant in caſibus nonnullis, ut in cæteris probent contrarium rei. Exemplum eſto: Si in turba tumultuantium quidam gladio fuerit confoſſus, & teſtimonio hominum fide dignorum eminus adſpectantium conſtet, huic nigram fuiſſe chlamydem qui facinus commiſit, reperiaturque inter tumultuantes Gracchus cum tribus aliis ejus coloris tunicâ indutus; erit hæc tunica argumentum aliquod commiſſæ à Graccho cædis, ſed mixtum; quoniam uno caſu ejus culpam, tribus caſibus ejus innocentiam probat, prout videl. vel ab ipſo vel ab uno reliquorum trium cædes patrata fuerit; nec enim ab iſtis patrari potuit, quin eo ipſo Gracchus ponatur innocens. Quòd ſi verò in ſubſecuto examine Gracchus palluerit, pallor hic faciei eſt argumentum purum: probat enim Gracchi culpam, ſi à læſa conſcientia proficiſcatur; ſed non viciſſim probat ejus innocentiam, ſi aliunde proveniat; poteſt enim fieri, ut alia de cauſa palleſcat Gracchus, & tamen ipſe ſit auctor cædis.

Ex iis, quæ hactenus dicta ſunt, perſpicuum eſt, vim probandi, qua pollet quodlibet argumentum, pendere à multitudine caſuum, quibus illud exiſtere vel non exiſtere indicare vel non indicare, aut etiam contrarium rei indicare poteſt; adeoque gradum certitudinis ſeu probabilitatem, quam generat hoc argumentum, ex caſibus iſtis per Doctrinam primæ Partis non aliter elici poſſe quàm ſortes aleatorum in ludis aleæ inveſtigari ſolent. Ad quod oſtendendum ſumamus numerum caſuum, quibus contingere poteſt ut argumentum aliquod

liquod existat, esse b; eorum, quibus fieri potest ut non existat, c; amborum $a \infty b+c$; item numerum casuum, quibus contingere potest ut indicet, β; ut non indicet, aut contrarium rei indicet, γ; amborum $\alpha \infty \beta + \gamma$. Pono autem, omnes casus æquè possibiles esse, seu pari facilitate evenire posse; alias enim moderatio est adhibenda, & pro quovis casu faciliori tot alii casus numerandi sunt, quoties is cæteris facilius evenit: ex. gr. pro casu triplo faciliori numero tres casus, qui pari cum cæteris facilitate contingere possint.

1. Itaque sit primò argumentum *contingenter existens & necessariò indicans:* erunt ex modo positis b casus, quibus existere adeoque & indicare rem (seu 1) potest; & c casus, quibus potest non existere, adeoque nec quicquam indicare; id quod per Coroll. 1. Prop. III. primæ Part. valet $\frac{b\cdot 1 + c\cdot 0}{a} \infty \frac{b}{a}$, ita ut tale argumentum probet $\frac{b}{a}$ rei seu certitudinis rei.

2. Sit deinde argumentum *necessariò existens & contingenter indicans*: erunt ex hyp. β casus, quibus fieri potest ut indicet rem, & γ casus ut non indicet, seu ut contrarium indicet; quod vim argumenti ad rem probandam nunc efficit $\frac{\beta\cdot 1 + \gamma\cdot 0}{\alpha} \infty \frac{\beta}{\alpha}$: probat ergò hujusmodi argumentum $\frac{\beta}{\alpha}$ certitudinis rei, atque insuper si sit mixtum (quod eodem modo patet) $\frac{\gamma\cdot 1 + \beta\cdot 0}{\alpha} \infty \frac{\gamma}{\alpha}$ certitudinis contrarii.

3. Si quod argumentum *contingenter existit & contingenter indicat*, pono statim existere, quo casu per modo ostensa probare censetur $\frac{\beta}{\alpha}$ rei, & insuper si sit mixtum, $\frac{\gamma}{\alpha}$ contrarii: unde cùm sint b casus, quibus existere; & c casus, quibus non existere, adeoque & nil probare possit; valebit hoc argumentum ad rem probandam $\frac{b\cdot\beta:\alpha + c\cdot 0}{a} \infty \frac{b\beta}{a\alpha}$: &, si sit mixtum, ad probandum contrarium $\frac{b\cdot\gamma:\alpha + c\cdot 0}{a} \infty \frac{b\gamma}{a\alpha}$.

4. Porrò si plura concurrant argumenta ad ejusdem rei probationem, vocenturque

numeri casuum, argumenti	*pr.*	*sec.*	*tert.*	*quart.*	*quint.*	&c.
omnium	*a*	*d*	*g*	*p*	*s*	&c.
probantium . . .	*b*	*e*	*h*	*q*	*t*	&c.
non-probantium aut probant. contr.	*c*	*f*	*i*	*r*	*u*	&c.

vis probandi ex omnium argumentorum concursu resultans sic æstimatur. Sint autem primò omnia argumenta *pura*; erit primi seorsim spectati pondus $\frac{b}{a} \infty \frac{a-c}{a}$ (vocando sic $\frac{\beta}{\alpha}$, si contingenter indicet; aut $\frac{b\beta}{a\alpha}$, si simul contingenter existat) ut vidimus. Accedat nunc alterum argumentum, quod *e* vel $d-f$ casibus probat rem seu 1, & *f* casibus nil probat, solumque adeò pondus primi argumenti, quod ostensum est esse $\frac{a-c}{a}$, efficax relinquit: valebit pondus ex utroq; argumento conflatum $\frac{\overline{d-f}.1 + f.\overline{a-c:a}}{d} \infty \frac{ad-cf}{ad} \infty 1 - \frac{cf}{ad}$ rei. Jungatur & tertium; erunt *h* seu $g-i$ casus, qui probant rem, & *i* casus, quibus nullum est argumentum, solaque duo priora vim suam probandi $\frac{ad-cf}{ad}$ retinent: unde vis omnium trium censetur $\frac{\overline{g-i}.1 + i.\overline{ad-cf:ad}}{g} \infty \frac{adg-cfi}{adg} \infty 1 - \frac{cfi}{adg}$. Et ita deinceps, si plura præstò sint argumenta. E quibus patet, quòd omnia junctim sumta probabilitatem inducunt, quæ ab absoluta rei certitudine seu unitate deficiat parte unitatis, orta ex divisione producti casuum non probantium per productum casuum omnium in universis argumentis.

5. Sint deinde omnia argumenta *mixta*: Quoniam numerus cāsuum probantium primi argumenti est *b*, secundi , tertii *h*, &c. & probantium contrarium *c*, *f*, *i*, &c. probabilitas rei ad probabilitatem contrarii, vi solius primi argumenti, se habet ut *b* ad *c*; & vi solius secundi, ut *e* ad *f*; & vi solius tertii, ut *h* ad *i*, &c unde sat evidens est, quòd vis probandi t. talis ex omnium argumentorum concursu resultans componatur ex viribus omnium argumentorum parti-

particularium, i. e. quòd probabilitas rei ad probabilitatem contrarii se habeat in ratione beh &c. ad cfi &c. adeò ut probabilitas absoluta rei sit $\frac{beh}{beh+cfi}$, & probabilitas absoluta contrarii $\frac{cfi}{beh+cfi}$.

6. Sint rursus quædam argumenta *pura* (velut tria priora) & quædam *mixta* (ut duo reliqua). Considero primò sola pura, quæ per §. 4. probant $\frac{adg-cfi}{adg}$ certitudinis rei, defectu ad unitatem existente $\frac{cfi}{adg}$; sunt ergò velut $adg-cfi$ casus, quibus tria hæc argumenta junctim sumta probant rem seu 1; & cfi casus, quibus nil probant, solisque proin argumentis mixtis locum probandi concedunt: probant autem hæc duo per præced. §. 5, $\frac{qt}{qt+rn}$ rei, & $\frac{rn}{qt+rn}$ contrarii. Quare probabilitas rei ex omnibus argumentis resultans est $\frac{\overline{adg-cfi}\,1+cfi.qt:\overline{qt+rn}}{adg} \infty \frac{adgqt+adgrn-cfirn}{adgqt+adgrn} \infty 1-\frac{cfirn}{adg.\overline{qt+rn}}$, quæ ab omnimoda certitudine ceu unitate deficit producto partis $\frac{cfi}{adg}$ (qua ab eadem deficit probabilitas rei per §. 4. ex solis argumentis puris resultans) per $\frac{rn}{qt+rn}$ probabilitatem absolutam contrarii per præced. §. 5. ex argumentis mixtis elicitam.

7. Quòd si præter argumenta quæ rei probandæ conducunt, alia se offerunt argumenta pura, quibus contrarium suadetur, utriusque generis argumenta per præced. regulas seorsim ponderanda sunt, ut inde constare possit ratio, quæ inter probabilitatem rei & probabilitatem contrarii intercedit. Ubi notandum, si argumenta, quæ in utramque partem afferuntur sunt satis fortia, fieri posse, ut absoluta probabilitas utriusque partis semissem certitudinis notabiliter superet, h. e. ut utrumque contrariorum reddatur probabile, etsi relativè loquendo unum sit minus probabile altero; sic fieri potest, ut quidpiam habeat $\frac{2}{3}$ certitudinis, dum ejus contrarium possidet $\frac{3}{4}$; quo pacto utrumque contrariorum erit probabile, & tamen prius minus probabile suo contrario, idque in ratione $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{4}$, sive 8 ad 9.

Dissimulare hic non possum, quòd in speciali applicatione ha-

rum regularum multa occurſura prævideo, quæ in cauſa eſſe queunt, ut turpiter ſæpe quis hallucinetur, niſi in diſcernendis argumentis cautè procedat: quandoque enim diſtincta videri poſſunt argumenta, quæ reapſe unum idemque argumentum conſtituunt; aut vice verſa unum videntur, quæ diſtincta ſunt; nonnunquam ponuntur in argumento talia, quæ argumentum contrarii planè evertunt; &c. In cujus rei illuſtrationem unum tantùm alterumve exemplum adduco: Pono in ſupra allato exemplo Gracchi, homines hos fide dignos, qui tumultuantes viderunt, in Auctore cædis ruſos inſuper capillos obſervaſſe, talique capillitio Gracchum cum duobus aliis notari, ſed quorum neuter nigra toga ſit veſtitus. Hìc, ſi quis ex iſtis indiciis, quòd præter Gracchum tres ſint atro colore veſtiti, & præter eundem duo rufis capillis inſignes, colligere vellet probabilitatem culpæ ad probabilitatem innocentiæ in perſona Gracchi per §. 5. ſe habere in ratione compoſita ex ſubtripla & ſubdupla, h.e. in ratione ſubſextupla, illumque adeo veriſimilius multo innocentem eſſe, quàm reum facinoris, is utique ineptè colligeret; cùm hìc propriè non adſint duo argumenta, ſed unum tantùm idemque à duabus ſimul circumſtantiis coloris veſtium & capillorum petitum, quæ duæ circumſtantiæ cùm in ſola perſona Gracchi junctim conveniant, arguunt certò non alium quàm ipſum auctorem cædis eſſe potuiſſe. Aliud exemplum eſto: De Contractu quodam ſcripto dubium movetur, an dies inſtrumento appoſitus fraudulenter ſit anticipatus? Argumentum pro negativa hoc eſſe poteſt, quòd inſtrumentum ſignatum ſit manu Notarii, i.e. perſonæ publicæ & juratæ, quem non veriſimile eſt quicquam commiſiſſe fraudis, cùm id ſine ſummo honoris ac fortunæ ſuæ periculo facere non potuiſſet, ac propterea etiam inter 50 vix unus reperiatur, qui iſthuc nequitiæ procedere audeat. Argumenta vero pro affirmativa poſſunt eſſe, quòd Notarii hujus fama peſſimè audiat, quòd ex fraude maximum expectare potuit lucrum, & præſertim quòd talia atteſtetur, quæ nihil probabilitatis habent, veluti ſi ſcripſiſſet, quendam alteri mutuò locaſſe 10000 aureos, eo tempore, quo ex omnium æſtimatione vix centum in univerſis bonis habere poterat. Hìc ſi argumentum à charactere ejus qui ſubſcripſit petitum ſeorſim conſideres, cenſere poteris probabi-

babilitatem authentiæ instrumenti velut $\frac{49}{50}$ certitudinis valere. Sin argumenta in contrarium expendas, agnoscere teneris fieri vix posse, quin instrumento falsum insit, adeoque fraudem in illo commissam moralem planè certitudinem, h.e. velut $\frac{999}{1000}$ certitudinis habere. Inde verò concludi non debet, probabilitatem authentiæ ad probabilitatem fraudis per §. 7. esse in ratione $\frac{49}{50}$ ad $\frac{999}{1000}$, hoc est, in ratione penè æqualitatis: dum enim Notarium pono diffamatæ fidei, hoc ipso pono, eum non comprehendi in casu horum 49 proborum Notariorum, qui fraudes detestantur; sed esse ipsum illum quinquagesimum, qui sibi religioni non ducit, perfidè in officio suo versari: id quod vim omnem illius argumenti, quod alias authentiam instrumenti probare posset, prorsus tollit ac destruit.

CAPUT IV.

De duplici Modo investigandi numeros casuum. Quid sentiendum de illo, qui instituitur per experimenta. Problema singulare eam in rem propositum. &c.

Ostensum est in Capite præced. quomodo ex numeris casuum, quibus rerum quarumvis argumenta existere vel non existere, indicare vel non indicare, aut etiam contrarium indicare possunt, ipsorum vires probandi iisque proportionatæ rerum probabilitates calculo subduci & æstimari queant. Eò itaque deventum est, ut ad conjecturas de re qualibet ritè formandas aliud nil requiratur, quàm ut tum numeri horum casuum accuratè determinentur, tum & definiatur, quanto facilius alii aliis accidere possint. At hîc tandem nobis aqua hærere videtur, cùm vix in paucissimis præstare hoc liceat, nec alibi ferè succedat, quàm in aleæ ludis, quos primi inventores ad æquitatem ipsis conciliandam data opera sic instituerunt, ut certi notique essent numeri casuum, ad quos sequi debet lucrum aut damnum, & ut casus hi omnes pari facilitate obtingere possent. In cæteris enim plerisque vel à naturæ operatione vel ab hominum arbitrio pendentibus effectis id neutiquam locum habet. Ita ex. gr. noti

noti ſunt numeri caſuum in teſſeris; in ſingulis enim tot manifeſtè ſunt quot hedræ, iique omnes æquè proclives; cùm propter ſimilitudinem hedrarum & conforme teſſeræ pondus nulla ſit ratio, cur una hedrarum pronior eſſet ad cadendum quàm altera, quemadmodum fieret, si hedræ diſſimilis forent figuræ, aut teſſera una in parte ex ponderoſiore materia conſtaret quàm in altera. Sic itidem noti ſunt numeri caſuum ad educendam ex urna ſchedulam albam nigramve, & notum eſt omnes æquè poſſibiles eſſe; quia nimirum determinati notique ſunt numeri ſchedarum utriusque generis, nullaque perſpicitur ratio, cur hæc vel illa potius exire debeat quàm quælibet alia. At quis cedo mortalium unquam definiet numerum ex. gr. morborum, veluti totidem caſuum, qui innumeras corporis humani partes quavis ætate invadere, mortemque nobis inferre valent; & quantò facilius hic quàm ille, peſtis quàm hydrops, hydrops quàm febris, hominem perimat, ut inde de futuro vitæ necisque ſtatu conjectura formari poſſit? Quis item recenſebit caſus innumeros mutationum, quibus aër quotidie obnoxius eſt, ut inde conjicere poſſit, quænam poſt menſem, nedum poſt annum, ejus futura ſit conſtitutio? Rurſus, quis mentis humanæ naturam, aut admirabilem corporis noſtri fabricam ſatis perſpectam habuerit, ut in ludis. qui ab illius acumine aut hujus agilitate in totum vel ex parte dependent, determinare audeat caſus, quibus hic vel ille ludentium victoria potiri vel excidere poſſit? Hæc enim & talia cùm dependeant à cauſis omnino latentibus, atque inſuper innumerabili complexionum varietate induſtriam noſtram æternum luſuris, inſanientis planè foret, quicquam hoc pacto cognoſcere velle.

Verum enimverò alia hic nobis via ſuppetit, quâ quæſitum obtineamus; & quod à priori elicere non datur, ſaltem *à poſteriori*, hoc eſt, ex eventu in ſimilibus exemplis multoties obſervato eruere licebit; quandoquidem præſumi debet, tot caſibus unumquodque poſthac contingere & non contingere poſſe, quoties id antehac in ſimili rerum ſtatu contigiſſe & non contigiſſe fuerit deprehenſum. Nam ſi ex. gr. facto olim experimento in tercentis hominibus ejusdem, cujus nunc Titius eſt, ætatis & complexionis, obſervaveris ducentos eorum ante exactum decennium mortem oppetiiſſe, reliquos ultra vitam

tam protraxisse, satis tuto colligere poteris, duplo plures casus esse, quibus & Titio intra decennium proximum naturæ debitum solvendum sit, quàm quibus terminum hunc transgredi possit. Ita si quis à plurimis retrò annis ad cœli tempestatem attenderit, notaveritque, quoties ea serena aut pluvia extiterit: aut si quis duobus ludentibus sæpissimè adstiterit, videritque quoties hic aut ille ludi victor evaserit, eo ipso rationem detexerit, quam probabiliter habent inter se numeri casuum, quibus iidem eventus præviis similibus circumstantiis & posthac contingere ac non contingere possunt.

Atque hic modus empiricus determinandi numeros casuum per experimenta neque novus est neque insolitus; nam & Celeb. Auctor Artis cogitandi magni acuminis & ingenii Vir Cap. 12. & seqq. postremæ Partis haud dissimilem præscribit, & omnes in quotidiana praxi eundem constanter observant. Deinde nec illud quenquam latere potest, quòd ad judicandum hoc modo de quopiam eventu non sufficiat sumsisse unum alterumque experimentum, sed quòd magna experimentorum requiratur copia; quando & stupidissimus quisque nescio quo naturæ instinctu per se & nulla prævia institutione (quod sanè mirabile est) compertum habet, quo plures ejusmodi captæ fuerint observationes, eò minus à scopo aberrandi periculum fore. Quanquam autem hoc naturaliter omnibus notum sit, demonstratio, qua id ex artis principiis evincitur, minimè vulgaris est, & proin nobis hic loci tradenda incumbit: ubi tamen parum me præstiturum existimarem, si in hoc uno, quod nemo ignorat, demonstrando subsisterem. Ulterius aliquid hic contemplandum superest, quod nemini fortassis vel cogitando adhucdum incidit. Inquirendum nimirum restat, an aucto sic observationum numero ita continuò augeatur probabilitas assequendæ genuinæ rationis inter numeros casuum, quibus eventus aliquis contingere & quibus non contingere potest, ut probabilitas hæc tandem datum quemvis certitudinis gradum superet: an verò Problema, ut sic dicam, suam habeat Asymptoton, h. e. an detur quidam certitudinis gradus quem nunquam excedere liceat, utcunque multiplicentur observationes, putà, ut nunquam ultra semissem, aut $\frac{2}{3}$, aut $\frac{3}{4}$ certitudinis partes certi fieri possimus, nos veram casuum rationem detexisse. Ut exemplo constet quid velim, po-

 no

no in urna quadam te inſcio reconditos eſſe ter mille calculos albos & bis mille nigros, teque eorum numerum experimentis exploraturum educere calculum unum poſt alterum (reponendo tamen ſingulis vicibus illum quem eduxiſti, priusquam ſequentem eligas, ne numerus calculorum in urna minuatur) & obſervare, quoties albus & quoties ater exeat. Quæritur, utrum toties hoc facere poſſis, ut decuplo, centuplo, millecuplo &c. probabilius fiat (h. e. ut moraliter tandem certum evadat) numeros vicium, quibus album & quibus nigrum eligis, eandem rationem ſeſquialteram, qua ipſi calculorum ceu caſuum numeri gaudent, inter ſe habituros, quàm aliam quamlibet rationem ab iſta diverſam? Nisi enim hoc fiat, fateor actum fore de noſtro conatu explorandi numeros caſuum per experimenta. At ſi id obtineat, acquiraturque tandem hoc pacto moralis certitudo (quemadmodum hoc etiam reapſe fieri ſequenti Capite oſtendam) æquè propemodum exploratos habebimus *à poſteriori* caſuum numeros, acſi nobis à priori cogniti eſſent; quod ſane in uſu vitæ civilis, ubi moraliter certum pro abſolute certo habetur, per **Ax. 9. Cap. II.** abunde ſufficit ad conjecturas noſtras in quavis materia contingente non minus ſcientificè dirigendas, atque in ludis aleæ: etenim ſi loco urnæ ſubſtituamus aërem, ex. gr. ſive corpus humanum, quæ fomitem variarum mutationum atque morborum intra ſe, velut urna calculos, continent, poterimus utique eodem modo per obſervationes determinare, quanto facilius in iſtis ſubjectis hic vel ille eventus accidere poſſit.

Ne autem hæc ſecus intelligantur quàm oportet, probè notandum eſt, quòd rationem inter numeros caſuum, quam experimentis determinare aggredimur, non præcisè & in indiviſibili acceptam velim (ſic enim contrarium prorſus eveniret, eoque minus probabile fieret, veram rationem inventam eſſe, quo plures caperentur obſervationes) verum rationem in aliqua latitudine ſumtam, i. e. binis limitibus concluſam, ſed qui tam arcti conſtitui poſſunt, quàm quis voluerit. Nimirum, ſi in exemplo calculorum modo allato duas rationes aſſumamus $\frac{301}{200}$ & $\frac{299}{200}$, vel $\frac{3001}{2000}$ & $\frac{2999}{2000}$, &c. quarum una proximè major, altera proximè minor eſt ſeſquialtera, oſtendetur quòd data quavis probabilitate probabilius fieri poſſit, rationem per experimenta

rimenta crebro repetita inventam intra hos limites rationis sesquialteræ, quàm extra casuram esse.

Hoc igitur est illud Problema, quod evulgandum hoc loco proposui, postquam jam per vicennium pressi, & cujus tum novitas, tum summa utilitas cum pari conjuncta difficultate omnibus reliquis hujus doctrinæ capitibus pondus & pretium superaddere potest. Ejus autem solutionem priusquam tradam, paucis objectiones diluam, quas Viri quidam docti contra hæc placita moverunt.

1. Objiciunt primò, aliam esse rationem calculorum, aliam morborum aut mutationum aëris; illorum numerum determinatum esse, horum indeterminatum & vagum. Ad quod respondeo, utrumque respectu cognitionis nostræ æquè poni incertum & indeterminatum; sed quicquam in se & sua natura tale esse, non magis à nobis posse concipi, quàm concipi potest, idem simul ab Auctore naturæ creatum esse & non creatum: quæcunque enim Deus fecit, eo ipso dum fecit, etiam determinavit.

2. Objiciunt secundò, calculorum numerum finitum esse, morborum &c. infinitum. *Resp.* stupendè vastum potius esse, quàm infinitum; sed demus actu infinitum esse: notum est, quòd etiam inter duo infinita determinata possit intercedere ratio, eaque numeris finitis vel accuratè, vel saltem quàm proximè quis voluerit, explicabilis. Sic utique circumferentiæ circuli ad diametrum determinata est ratio, quæ licet accuratè non exprimatur nisi per numeros cyclicos Ludolphi in infinitum continuatos, ab Archimede tamen, Metio & ipso Ludolpho limitibus ad usum sufficientissimè constrictis definitur: unde nil impedit, quo minus ratio inter duo infinita, sed numeris finitis quàm proximè expressa, finitis quoque experimentis determinetur.

3. Ajunt tertiò, numerum morborum non manere constanter eundem, sed quotidie novos pullulare. *Resp.* quin tractu temporis morbi multiplicari queant, inficiari non possumus; & certum est, eum qui vellet ex observationibus hodiernis concludere ad tempora Patrum antediluvianorum, à veritate enormiter aberraturum esse. Inde verò nil aliud sequitur, quàm quòd interdum novæ capiendæ sunt

 obser-

observationes; quemadmodum capiendæ forent cum calculis, si numerus eorum in urna mutari supponeretur.

Caput V.

Solutio Problematis præcedentis.

Ut prolixæ rem demonstrationis quâ licet brevitate & perspicuitate expediam, conabor omnia reducere ad abstractam Mathesin, depromendo ex illa sequentia Lemmata, quibus ostensis cætera in nuda applicatione consistent.

Lemma 1. Posita serie quotlibet numerorum 0, 1, 2, 3, 4, &c. à nulla seu cifra naturali se consequentium ordine, quorum extremus & maximus dicatur $r+s$, intermediorum quispiam r, & qui huic ex utraque parte proximè latus cingunt, $r+1$ & $r-1$: si continuetur porrò hæc series, donec extimus terminus utcunque multiplex fiat numeri $r+s$, putà donec sit $nr+ns$, atque in eadem ratione augeantur intermedius r, & ejus laterales $r+1$ & $r-1$; sic ut eorum loco prodeant nr, $nr+n$ & $nr-n$, ipsaque series initio posita

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots r-1, r, r+1, \ldots\ldots\ldots r+s.$$

mutetur in hanc

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots nr-n \ldots nr \ldots\ldots nr+n \ldots\ldots\ldots nr+ns.$$

multiplicabuntur quidem hoc pacto termini seriei, tam illi qui medio nr & alterutri limitum $nr+n$ aut $nr-n$ interjacent, quàm illi qui inde à limitibus ad ex[illegible]os usque $nr+ns$ aut 0 porrò protenduntur: nunquam tamen (quantumvis magnus assumatur numerus n) numerus terminorum ultra limitem majorem $nr+n$ plusquam $s-1$; nec numerus terminorum ultra minorem $nr-n$ plusquam $r-1$ vicibus superabit numerum horum, qui intermedio nr & alterutro limitum $nr+n$ vel $nr-n$ sunt conclusi. Nam facta subtractione patet, à limite majore ad terminum extremum $nr+ns$ esse intervallum terminorum $ns-n$; à limite minore ad alterum extremum 0 intervallum $nr-n$; & ab intermedio numero ad alterutrum limitem intervallum n terminorum. Est verò semper $ns-n . n :: s-1 . 1$; & $nr-n . n :: r-1 . 1$. Quare constat &c.

Lemm.

Lemm. 2. Omnis poteſtas integra alicujus binomii $r+s$ terminis exprimitur uno pluribus, quàm eſt unitatum numerus in poteſtatis indice. Nam Quadratum conſtat terminis tribus, Cubus 4, Biquadratum 5, & ita porrò, ut notum.

Lemm. 3. In qualibet poteſtate hujus binomii (ſaltem cujus index æqualis binomio $r+s \infty t$, aut ejus multiplex, putà $nr+ns \infty nt$) ſi terminum quempiam M nonnulli præcedant, alii ſequantur, & ſit numerus omnium præcedentium ad numerum omnium ſequentium reciprocè, ut s ad r, ſeu quod eodem redit, ſi in illo termino numeri dimenſionum literarum r & s directe ſint, ut ipſæ quantitates r & s, erit ille terminus omnium in eadem poteſtate maximus, illi verò propior ab utravis parte major remotiori ab eadem parte: ſed idem terminus M ad propiorem minorem habebit rationem, quàm (in pari terminorum intervallo) propior ad remotiorem.

Dem. 1. Nota res eſt inter Geometras, quòd poteſtas nt binomii $r+s$, hoc eſt, $\overline{r+s}^{nt}$ hâc ſerie exprimitur:

$$r^{nt} + \frac{nt}{1} r^{nt-1} s + \frac{nt.nt-1}{1.2} r^{nt-2} ss + \frac{nt.nt-1.nt-2}{1.2.3} r^{nt-3} s^3 + \&c.$$

uſque ad $+\frac{nt}{1} rs^{nt-1} + s^{nt}$; in cujus progreſſu pars una binomii r dimenſionibus ſuis gradatim minuitur, pars altera s augetur, exiſtentibus interea coëfficientibus ſecundi & penultimi termini $\frac{nt}{1}$, 3^{ti} & antepenultimi $\frac{nt.nt-1}{1.2}$, 4^{ti} & proantepenultimi $\frac{nt.nt-1.nt-2}{1.2.3}$, & ſic deinceps. Et quia numerus omnium præter M terminorum per Lemm. 2. eſt $nt \infty nr+ns$, ex hypoth. autem numerus ipſum præcedentium ad numerum ſequentium ſe habet, ut s ad r, erit numerus eorum, qui terminum M præcedunt, ns; & qui ipſum ſequuntur, nr. Unde ex lege progreſſionis terminus M fiet

$$\frac{nt.nt-1.nt-2....nt-ns+1(nr+1)}{1.2.3.4......ns} r^{nr} s^{ns}, \text{ vel}$$

$$\frac{nt.nt-1.nt-2....nt-nr+1(ns+1)}{1.2.3.4.....nr} r^{nr} s^{ns};$$

& ſimiliter terminus huic proximus ad

sinistram: | *dextram:*

$$\frac{ns.\overline{ns-1}.\overline{ns-2}\ldots\ldots\overline{nr+2}}{1.2.3.4\ldots\ldots\overline{ns-1}}\,r^{nr+1}s^{ns-1} \;\Big|\; \frac{ns.\overline{ns-1}.\overline{ns-2}\ldots\ldots\overline{ns+2}}{1.2.3.4\ldots\ldots\overline{nr-1}}\,r^{nr-1}s^{ns+1};$$

nec non sequens versus *sinistram:* | *dextram:*

$$\frac{ns.\overline{ns-1}.\overline{ns-2}\ldots\overline{nr+3}}{1.2.3.4\ldots\overline{ns-2}}\,r^{nr+2}s^{ns-2} \;\Big|\; \frac{ns.\overline{ns-1}.\overline{ns-2}\ldots\overline{ns+3}}{1.2.3.4\ldots\overline{nr-2}}\,r^{nr-2}s^{ns+2};$$

è quibus, præmissa ubique convenienti reductione tam coëfficientium quàm terminorum purorum per divisores communes, patebit, quòd terminus M ad proximum versus sinistram se habet, ut $\overline{nr+1}.s$ ad $ns.r$, hic ad sequentem, ut $\overline{nr+2}.s$ ad $\overline{ns-1}.r$ &c. nec non terminus M ad proximum versus dextram, ut $\overline{ns+1}.r$ ad $nr.s$; & hic ad sequentem, ut $\overline{ns+2}.r$ ad $\overline{nr-1}.s$. &c. Est verò $\overline{nr+1}.s$ $(nrs+s) > ns.r$ (nrs), & $\overline{nr+2}.s$ $(nrs+2s) > \overline{ns-1}.r$ $(nrs-r)$ &c. ut & $\overline{ns+1}.r$ $(nrs+r) > nr.s$ (nrs), & $\overline{ns+2}.r$ $(nrs+2r) > \overline{nr-1}.s$ $(nrs-s)$ &c. ut apparet. Ergò terminus M major proximo ab utravis parte, hic major remotiori ab eadem parte, &c. Q. E. D.

2. Ratio $\frac{nr+1}{ns}$ minor est ratione $\frac{nr+2}{ns-1}$, ut patet: ergò & addita communi ratione $\frac{s}{r}$, ratio $\frac{\overline{nr+1}.s}{ns.r} < \frac{\overline{nr+2}.s}{\overline{ns-1}.r}$. Similiter ratio $\frac{ns+1}{nr} < \frac{ns+2}{nr-1}$, ut liquet: igitur addita ratione communi $\frac{r}{s}$, ratio quoque $\frac{\overline{ns+1}.r}{nr.s} < \frac{\overline{ns+2}.r}{\overline{nr-1}.s}$. Sed ratio $\frac{\overline{nr+1}.s}{ns.r}$ est illa quam terminus M habet ad proximum versus sinistram; & $\frac{\overline{nr+2}.s}{\overline{ns-1}.r}$ illa, quam habet hic ad sequentem: item ratio $\frac{\overline{ns+1}.r}{nr.s}$ est ea, quam terminus M habet ad proximum versus dextram; & $\frac{\overline{ns+2}.r}{\overline{nr-1}.s}$, quam habet hic ad sequentem; uti modò ostensum est, & ad cæteros omnes ex æquo concludi potest. Quare maximus terminorum M ad propiorem ex utravis parte minorem rationem habet, quàm (in pari terminorum intervallo) propior ad remotiorem ex eadem parte. Q. E. D.

Lemm.

Lemm. 4. In poteſtate binomii, cujus index nt, tantus poteſt concipi numerus n, ut maximus terminorum M ad alios duos L & Λ, intervallo n terminorum ſiniſtrorſum & dextrorſum à ſe diſtantes, rationem acquirat qualibet data majorem.

Dem. Cùm enim in Lemm. præced. terminus M ſit inventus

$$\frac{nt.nt-1.nt-2 \ldots\ldots nr+1}{1.2.3.4 \ldots\ldots ns} r^{nr} s^{ns}, \text{ vel}$$

$$\frac{nt.nt-1.nt-2 \ldots\ldots ns+1}{1.2.3.4 \ldots\ldots nr} r^{nr} s^{ns},$$

erit ex lege progreſſionis (addito n ad ultimum factorem coëfficientis in numeratore, & ablato ab ultimo in denominatore; nec non alterius literarum r & s dimenſionibus eodem n auctis, alterius diminutis) terminus

L *ad ſiniſtram:* | Λ *ad dextram.*

$$\frac{nt.nt-1.nt-2 \ldots nr+n+1}{1.2.3.4 \ldots ns-n} r^{nr+n} s^{ns-n} \;\Big|\; \frac{nt.nt-1.nt-2 \ldots ns+n+1}{1.2.3.4 \ldots nr-n} r^{nr-n} s^{ns+n};$$

unde facta convenienti reductione per diviſores communes, reſultat

$$\frac{M}{L} \infty \frac{nr+n.nr+n-1.nr+n-2 \ldots nr+1}{ns-n+1.ns-n+2.ns-n+3 \ldots ns} \frac{\times s^n}{\times r^n}$$

$$\Big|\; \frac{M}{\Lambda} \infty \frac{ns+n.ns+n-1.ns+n-2 \ldots ns+1 \times r^n}{nr-n+1.nr-n+2.nr-n+3 \ldots nr \times s^n},$$

ſive (dimenſionibus quantitatum r^n & s^n in ſingulos factores, ob æqualem amborum numerum, æqualiter diſtributis)

$$\frac{M}{E} \infty \frac{nrs+ns.nrs+ns-s.nrs+ns-2s \ldots nrs+s}{nrs-nr+r.nrs-nr+2r.nrs-nr+3r \ldots nrs}$$

$$\Big|\; \frac{M}{\Lambda} \infty \frac{nrs+nr.nrs+nr-r.nrs+nr-2r \ldots nrs+r}{nrs-ns+s.nrs-ns+2s.nrs-ns+3s \ldots nrs}:$$

ſed hæ rationes ſunt infinitè magnæ, cùm numerus n ponitur infinitus; tunc enim evaneſcunt numeri 1, 2, 3, &c. præ n, ipſæque nr 8 n 8 1, 2, 3, &c. & ns 8 n 8 1, 2, 3, &c. tantundem valent, ac nr 8 n & ns 8 n, ſic ut diviſione inſtituta per n, prodeat

$$\frac{M}{L} \infty$$

$\frac{M}{L} \infty \frac{rs+s.rs+s.rs+s.\ldots.rs}{rs-r.rs-r.rs-r\ldots.rs}$ | $\frac{M}{\Lambda} \infty \frac{rs+r.rs+r.rs+r.\ldots.rs}{rs-s.rs-s.rs-s.\ldots.rs}$;

quæ quantitates componuntur, ut patet, ex tot rationibus $\frac{rs+s}{rs-r}$ aut $\frac{rs+r}{rs-s}$, quot ſunt factores: at horum numerus eſt n, h. e. infinitus; cùm inter primum $nr+n$, aut $ns+n$, & ultimum $nr+1$ aut $ns+1$ differentia ſit $n-1$. Idcircò rationes iſtæ ſunt infinituplicatæ rationum $\frac{rs+s}{rs-r}$ & $\frac{rs+r}{rs-s}$, ac proinde ſimpliciter infinitæ: qua de ſequela si dubites, concipe infinitos continuè proportionales in ratione $rs+s$ ad $rs-r$, vel $rs+r$ ad $rs-s$; erit primi ad tertium ratio duplicata, primi ad 4tum triplicata, ad 5tum quadruplicata, &c. ad ultimum infinituplicata rationis $\frac{rs+s}{rs-r}$ vel $\frac{rs+r}{rs-s}$: conſtat autem, rationem primi ad ultimum infinitè magnam eſſe, ob ultimum ∞ 0. (*Vid. Coroll. Poſit. noſtra 6tæ de Seriebus Infinitis.*) Quare etiam conſtat, infinituplicatam rationis $\frac{rs+s}{rs-r}$ vel $\frac{rs+r}{rs-s}$ infinitam eſſe. Oſtenſum itaque eſt, quòd in poteſtate infinitè alta binomii terminus maximus M ad duos L & Λ rationem habeat omni aſſignabili ratione majorem. Q. E. D.

Lemm. 5. Poſitis, quæ in præced. tantus intelligi poteſt numerus n, ut ſumma omnium terminorum ab intermedio & maximo M ad ambos uſque L & Λ incluſivè ſumtorum, ad ſummam omnium reliquorum extra hos limites L & Λ utrinque protenſorum rationem habeat omni data ratione majorem.

Dem. Vocentur termini intra maximum M & limitem ſiniſtrum L, ſecundus à maximo F, tertius G, quartus H, &c. & extra limitem L, ſecundus ab ipſo P, tertius Q, quartus R, &c. Quoniam igitur ratio $\frac{M}{F} < \frac{L}{P}$ & $\frac{F}{G} < \frac{P}{Q}$, & $\frac{G}{H} < \frac{Q}{R}$ &c. per part. 2. Lem̃. 3. erit quoque viciſſim $\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R}$ &c. Quare cùm poſitio n numero infinito, ratio $\frac{M}{L}$ ſit infinitè magna, per

Lem̃.

Lem. 4. fortius etiam cæteræ rationes $\frac{F}{P}$, $\frac{G}{Q}$, $\frac{H}{R}$, &c. erunt infinitæ; eaque propter & $\frac{F+G+H+\&c.}{P+Q+R+\&c.}$ infinita, h. e. omnes simul termini intra maximum M & limitem L contenti infinities majores erunt totidem simul terminis extra L porrectis ipsi L proximis. Et quoniam numerus omnium terminorum extra limitem L numerum omnium intra eundem & maximum M non nisi $s-1$ (h. e. non nisi finitis) vicibus superat, per 1. Lem. ipsique insuper termini eo minores evadunt, quo sunt à limite remotiores, per 1. part. 3. Lem. idcirco termini simul omnes intra M & L (etiam non computato M) omnes simul terminos extra L adhuc infinities superabunt. Similiter autem ostendetur ab altera parte, quòd omnes intra M & Λ conclusi termini omnes extra Λ porrectos (quorum numerus priorum numerum per Lem. 1. non nisi $r-1$ vicibus excedit) infinities superant. Quare denique omnes termini inter utrumque limitem L & Λ comprehensi (demto licet maximo M) omnes omninò terminos extra positos itidem infinities superabunt. Ergo multo magis unà cum maximo. Q. E. D.

Schol. Objici posset contra 4 & 5tum Lema, ab his qui speculationibus infiniti non assueverunt, quòd etiamsi in casu numeri n infiniti factores quantitatum, quæ rationes $\frac{M}{L}$ & $\frac{M}{\Lambda}$ exprimunt, $nr \; 8 \; n \; 8 \; 1, 2, 3$, &c. & $ns \; 8 \; n \; 8 \; 1, 2, 3$, &c. tantundem valent ac $nr \; 8 \; n$ & $ns \; 8 \; n$, evanescentibus ratione singulorum factorum numeris 1, 2, 3, &c. fieri tamen possit, ut omnes collecti vel in se ducti (propter infinitum factorum numerum) in infinitum excrescant, adeoque rationem infinituplicatam rationis $\frac{rs+s}{rs-r}$ aut $\frac{rs+r}{rs-s}$ infinitè diminuant, h. e. finitam reddant. Cui scrupulo melius satisfacere non possum, quàm si nunc porro modum ostendam assignandi, reapse finitum numerum n, sive finitam potestatem binomii, in qua summa terminorum intra limites L & Λ ad summam terminorum extra, rationem habeat data ratione quantumvis magna, quam litera c designo, majorem; utpote quo ostenso objectionem ultro corruere necesse est.

Hunc in finem assumo rationem quamlibet majoris inæqualitatis, quæ tamen sit minor ratione $\frac{rs+s}{rs-r}$ (pro terminis ad partem sinistram) puta rationem $\frac{rs+s}{rs}$ seu $\frac{r+1}{r}$, eamque toties (m vicibus) multiplico, quoad æquet vel superet rationem $c.\overline{s-1}$ ad 1, hoc est, ut sit $\frac{\overline{r+1}^m}{r^m} \infty$ vel $> c.\overline{s-1}$. Quoties autem id fieri debeat, compendiosè investigatur per logarithmos; nam sumtis quantitatum logarithmis fit $mL\overline{r+1} - mLr \infty$ vel $> L\overline{c.s-1}$, & divisione peracta statim habetur $m \begin{smallmatrix}\infty\\ >\end{smallmatrix} \frac{L\overline{c.s-1}}{L\overline{r+1}-Lr}$; quo invento sic pergo: In serie illa fractionum sive factorum, $\frac{nrs+ns}{nrs-nr+r}$. $\frac{nrs+ns-s}{nrs-nr+2r}$. $\frac{nrs+ns-2s}{nrs-nr+3r}$ ..... $\frac{nrs+s}{nrs}$, è quorum ductu per Lem. 4. resultat ratio $\frac{M}{L}$, observare licet, quòd singulæ fractiones sint minores quàm $\frac{rs+s}{rs-r}$, ita tamen ut ad hanc continuè propius accedant, quo major sumitur n: itaque quælibet earum aliquando fiet æqualis ipsi $\frac{rs+s}{rs} \infty \frac{r+1}{r}$; Quare videndum, quantus sit accipiendus valor n, ut fractio (cujus numerus ordinis est m) æquetur ipsi $\frac{r+1}{r}$. Est verò (ut ex progressionis lege perspicuum fit) fractio ordine m hæc: $\frac{nrs+ns-ms+s}{nrs-nr+mr}$, quæ adæquata fractioni $\frac{r+1}{r}$, dat $n \infty m + \frac{ms-s}{r+1}$, & inde $nt \infty mt + \frac{mst-st}{r+1}$. Dico, hunc esse indicem potestatis, ad quam si elevetur binomium $r+s$, futurum ut terminus maximus M superet limitem L plus quàm $c.\overline{s-1}$ vicibus. Nam quia fractio ordine m per hanc assumtionem numeri n fit $\frac{r+1}{r}$, per hypoth. & verò $\frac{r+1}{r}$ fractio secum ipsa m vicibus multiplicata, h. e. $\frac{\overline{r+1}^m}{r^m}$, per constr. æquet vel superet $c.\overline{s-1}$, fit ut

fit ut hæc fractio in omnes præcedentes fractiones ducta multo magis excedat $c.\overline{s-1}$; cùm singulæ præcedentium majores sint quàm $\frac{r+1}{r}$. Ergo magis adhuc superabit $c.\overline{s-1}$, quando ducitur una cum præcedentibus in omnes etiam consequentes, utpote quarum singulæ saltem æqualitatis rationem excedunt. Sed productum omnium harum fractionum rationem exhibet termini M ad L; igitur omnino constat, terminum M superare limitem L plus quàm $c.\overline{s-1}$ vicibus. Jam autem $\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R}$ &c. ut ostensum. Hinc multo magis secundus à maximo M secundum à limite L plus quàm $c.\overline{s-1}$ vicibus superabit, & magis adhuc tertius tertium, &c. Itaque tandem omnes termini intra maximum M & limitem L superant totidem è maximis extra hunc limitem plus quàm $c.\overline{s-1}$ vicibus; adeoque superant totidem illorum $s-1$ vicibus sumtos plus quàm c vicibus. Ergo multo evidentius superant omnes extra limitem L, quorum non nisi $s-1$ vicibus plures sunt, plus quàm c vicibus.

Pro terminis dextimis pari modo procedo: Assumo rationem $\frac{s+1}{s} < \frac{rs+r}{rs-s}$, & facio $\frac{\overline{s+1}^m}{s^m} \infty\!> c.\overline{r-1}$, invenioq; $m \infty\!> \frac{Lc.\overline{r-1}}{Ls+1-Ls}$. Deinde, in serie fractionum $\frac{nrs+nr}{nrs-ns+s}$. $\frac{nrs+nr-r}{nrs-ns+2s}$. $\frac{nrs+nr-2r}{nrs-ns+3s}$ . . . . . $\frac{nrs+r}{nrs}$, quæ rationem $\frac{M}{\Lambda}$ innuit, pono fractionem, quæ ordine est m, nempe $\frac{nrs+nr-mr+r}{nrs-ns+ms} \infty \frac{s+1}{s}$, indeque elicio $n \infty m + \frac{mr-r}{s+1}$, ac proin $nt \infty mt + \frac{mrt-rt}{s+1}$. Quo facto similiter ostendetur, ut antea, quòd binomio $r+s$ ad hanc potestatem sublato, terminus ejus maximus M superabit limitem Λ plus quàm $c.\overline{r-1}$ vicibus & per consequens etiam, quòd omnes maximo M & limite Λ conclusi superabunt omnes extra hunc limitem, quorum non nisi $r-1$ vicibus plures sunt, plus quam c vicibus. Itaque finaliter tandem concludimus, quòd elevato binomio $r+s$ ad potestatem, cujus index æquetur majori harum duarum quantitatum $mt + \frac{mst-st}{r+1}$

$\frac{mst - st}{r+1}$ & $mt + \frac{mrt - rt}{s+1}$, omnes simul termini inter utrumque limitem L & Λ comprehensi multo pluribus quàm c vicibus superabunt omnes simul terminos extra limites ab utraque parte protensos. Reperta igitur est finita potestas, quæ optatam habeat proprietatem. Q. E. F.

Propos. Princip. Sequitur tandem Propositio ipsa, cujus gratia hæc omnia dicta sunt, sed cujus nunc demonstrationem sola Lemmatum præmissorum applicatio ad præsens institutum absolvet. Ut circumlocutionis tædium vitem, vocabo casus illos, quibus eventus quidam contingere potest, *fœcundos* seu *fertiles*; & *steriles* illos, quibus idem eventus potest non contingere: nec non experimenta *fœcunda* sive *fertilia* illa, quibus aliquis casuum fertilium evenire deprehenditur; & *infœcunda* sive *sterilia*, quibus sterilium aliquis contingere observatur. Sit igitur numerus casuum fertilium ad numerum sterilium vel præcisè vel proximè in ratione $\frac{r}{s}$, adeoque ad numerum omnium in ratione $\frac{r}{r+s}$ seu $\frac{r}{t}$, quam rationem terminent limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$. Ostendendum est, tot posse capi experimenta, ut datis quotlibet (puta c) vicibus verisimilius evadat, numerum fertilium observationum intra hos limites quàm extra casurum esse, h. e. numerum fertilium ad numerum omnium observationum rationem habiturum nec majorem quàm $\frac{r+1}{t}$, nec minorem quàm $\frac{r-1}{t}$.

Dem. Ponatur numerus capiendarum observationum nt, & quæratur, quanta sit expectatio, seu quanta probabilitas, ut omnes existant fœcundæ, exceptis primo nulla, dein una, duabus, 3, 4 &c. sterilibus. Quandoquidem autem in qualibet observatione præsto sunt ex hyp. t casus, eorumque r fœcundi & s steriles, & singuli casus unius observationis cum singulis alterius combinari, combinatique rursus cum singulis tertiæ, 4^{tæ} &c. conjungi possunt, facile patet, huic negotio quadrare Regulam Annotationibus Prop. XIII.

XIII. primæ Part. in fine subnexam, & ejus Corollarium secundum, quod universalem formulam continet, cujus ope cognoscitur, quòd expectatio ad nullam observationem sterilem sit $r^{nt} : t^{nt}$, ad unam $\frac{nt}{1} r^{nt-1} s : t^{nt}$, ad duas steriles $\frac{nt . nt-1}{1 . 2} r^{nt-2} ss : t^{nt}$, ad tres $\frac{nt . nt-1 . nt-2}{1 . 2 . 3} r^{nt-3} s^3 : t^{nt}$, & sic deinceps; adeoque (rejecto communi nomine t^{nt}) quod gradus probabilitatum seu numeri casuum, quibus contingere potest, ut omnia experimenta sint fœcunda, vel omnia præter unum sterile, vel omnia præter duo, 3, 4 &c. sterilia, ordine exprimantur per r^{nt}, $\frac{nt}{1} r^{nt-1} s$, $\frac{nt . nt-1}{1 . 2} r^{nt-2} ss$, $\frac{nt . nt-1 . nt-2}{1 . 2 . 3} r^{nt-3} s^3$, &c. ipsissimos nempe terminos potestatis nt binomii $r + s$, in Lemmatis modo nostris excussæ: unde jam cætera omnia oppido manifesta sunt. Patet enim ex progressionis natura, quòd numerus casuum, qui cum ns sterilibus experimentis nr fœcunda adducunt, sit ipse terminus maximus potestatis M, utpote quem ns termini præcedunt, & nr sequuntur, per Lem. 3. item, quòd numeri illorum casuum, quibus aut $nr + n$ aut $nr - n$ experimentis fœcundis cæterisque sterilibus esse contingit, exhibeantur per terminos potestatis L & Λ, quippe intervallo n terminorum à maximo M utrinque distantes; & per consequens etiam, quòd summa casuum, quibus non pluribus experimentis quàm $nr + n$, nec paucioribus quàm $nr - n$ fœcundis esse contingit, exprimatur per summam terminorum potestatis intra limites L & Λ comprehensorum; summa reliquorum casuum, quibus aut plura aut pauciora experimenta fœcunda redduntur, per cæterorum terminorum limites hos L & Λ excedentium summam expressa. Quare cùm tanta sumi possit potestas binomii, ut summa terminorum utroque limite L & Λ inclusorum pluribus quàm c vicibus superet summam cæterorum limites hos excedentium, per Lem. 4. & 5. sequitur etiam, capi posse tot observationes, ut summa casuum, quibus numero fertilium observationum ad numerum omnium rationem habere contingit, non excedentem limites $\frac{nr+n}{nt}$ &

 $\frac{nr-n}{nt}$,

$\frac{nr-n}{nt}$, seu $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$, pluribus quàm c vicibus superet summam casuum reliquorum; h. e. ut pluribus quàm c vicibus probabilius reddatur, rationem numeri observationum fertilium ad numerum omnium intra hos limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$, quàm extra casuram esse. Quod demonstrandum erat.

In speciali autem horum applicatione ad numeros satis per se patet, quòd quo majores in eadem ratione assumuntur numeri r, s & t, eo arctius quoque constringi possunt limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$ rationis $\frac{r}{t}$. Idcirco si ratio inter numeros casuum $\frac{r}{s}$, per experimenta determinanda, sit ex. gr. sesquialtera, pro r & s non pono 3 & 2, sed 30 & 20, vel 300 & 200 &c. sufficiat posuisse $r \infty 30$, $s \infty 20$, & $t \infty r+s \infty 50$, ut limites fiant $\frac{r+1}{t} \infty \frac{31}{50}$, & $\frac{r-1}{t} \infty \frac{29}{50}$; & statuatur insuper $c \infty 1000$: sic fiet ex Scholii præscripto, pro terminis ad

sinistram:

$$m > \frac{L\,c.\overline{s-1}}{L\,\overline{r+1} - L\,r} \infty \frac{4.2787536}{142405} < 301$$

$$nt \infty mt + \frac{mst - st}{r+1} < 24728$$

dextram:

$$m > \frac{L\,c.\overline{r-1}}{L\,\overline{s+1} - L\,s} \infty \frac{4.4623980}{211893} < 211.$$

$$nt \infty mt + \frac{mrt - rt}{s+1} \infty 25550.$$

Unde per ibi demonstrata infertur, quòd institutis 25550 experimentis multo plus millies verisimilius sit, rationem quam numerus fertilium observationum obtinebit ad numerum omnium, intra hos limites $\frac{31}{50}$ & $\frac{29}{50}$ casuram, quàm extra. Atque eodem pacto, posita $c \infty 10000$, aut $c \infty 100000$ &c. cognoscetur, idem plus decies millies probabilius fore, si fiant experimenta 31258; & plus quàm centies millies.

millies, si capiantur 36966, &c. & sic porrò in infinitum, additis nempe continuo ad 25550 aliis 5708 experimentis. Unde tandem hoc singulare sequi videtur, quòd si eventuum omnium observationes per totam æternitatem continuarentur, (probabilitate ultimo in perfectam certitudinem abeunte) omnia in mundo certis rationibus & constanti vicissitudinis lege contingere deprehenderentur; adeo ut etiam in maximè casualibus atque fortuitis quandam quasi necessitatem, &, ut sic dicam, fatalitatem agnoscere teneamur; quam nescio annon ipse jam Plato intendere voluerit, suo de universali rerum apocatastasi dogmate, secundum quod omnia post innumerabilium seculorum decursum in pristinum reversura statum prædixit.

TRACTATUS
DE
SERIEBUS INFINITIS
Earumque
Summa Finita,
ET
Usu in Quadraturis Spatiorum
& Rectificationibus Curvarum.

PRAEFATIO.

CUm non ita pridem in Serierum Infinitarum speculationem incidissem, prima, cujus summa post Geometricam Progressionem ab aliis jam tractatam mihi sese offerebat, erat series fractionum, quarum denominatores Geometrica, numeratores Arithmetica progressione crescunt: quod cum Fratri indicassem, non tantum mox idem adinvenit ille, sed & præterea novæ cujusdam fractionum seriei, cujus denominatores Trigonalium, ut vocantur, numerorum dupli erant, summam pervestigavit; quam vero & ipse, cum significasset, postridie detexi, propositis ei vicissim aliis nonnullis, quæ interea, ut clavus clavum trudere solet, occasione hac repereram. Quibus inventis certatim alter alterum sic exercuimus, ut paucorum dierum spatio non tantum serierum illarum, quas Celeb. Leibnitius in Actis Erud. Lips. Anno 1682. M. Febr. & 1683. M. Octob. recenset, nosque paulo antea mirati fuimus, summas dare possemus, sed & plura alia eaque non contemnenda ex gemino duntaxat fundamento invenerimus, quorum unum consistit in resolutione seriei in alias infinitas series, alterum in subductione seriei uno alterove termino mutilatæ à seipsa integra. Horum vero præcipua (cum eorum nihil apud hos quos legi hactenus, publicatum viderim) enucleanda

anda proponam, præmissis nonnullis, quæ passim apud alios quoque vulgatæ prostant, Propositionibus, ne illas aliunde petere opus esset. Cæterum quantæ sit necessitatis pariter & utilitatis hæc serierum contemplatio, ei sane ignotum esse non poterit, qui perspectum habuerit, ejusmodi series sacram quasi esse anchoram, ad quam in maxime arduis & desperatæ solutionis Problematibus, ubi omnes alias humani ingenii vires naufragium passæ, velut ultimi remedii loco confugiendum est.

Axiomata seu Postulata.

1. OMne quantum est divisibile in partes se minores.

2. Omni quantitati finita potest accipi major.

3. Si quantitas quæpiam multata parte sui aliqua subtrahitur à seipsa integra, relinquitur illa pars.

PROPOSITIONES:

I. *Quod data quavis quantitate minus est, illud est non-quantum seu nihil.*

Dem. Nam si quantum esset, dividi posset in partes se minores, per Axiom. 1. non igitur esset data quavis quantitate minus, contra hyp.

II. *Quod data quavis quantitate majus est, infinitum est.*

Nam si finitum esset, illo posset accipi quantitas major, per Ax. 2. non igitur quavis data quantitate foret majus, contra hyp.

III. *Omnis Progressio Geometrica continuari potest per terminos infinitos.*

Semper enim fieri potest: Ut primus terminus ad secundum, sic postremus ad sequentem, & sequens ad alium & alium sine fine in infinitum; quorum quidem terminorum nullus æquari potest vel nihilo vel infinito, cum secus ad illum præcedens eam rationem habere non posset, quam habet primus ad secundum, contr. defin. progr.

IV. *Si sit Progressio Geometrica quæcunque* A, B, C, D, E; *& alia Arithmetica totidem terminorum* A, B, F, G, H, *incipiens ab iisdem terminis* A

& B, erunt reliquorum singuli in Geometrica singulis ordine sibi respondentibus in Arithmetica majores, tertius tertio, quartus quarto, ultimus ultimo, adeoque omnes omnibus.

Quia enim $A . B :: B . C :: C . D :: D . E$. erit per 25. 5. Eucl. tum $A+C > 2B \propto$ (ex nat. Progr. Arith.) $A+F$; unde $C > F$: tum $A+D > B+C > B+F \propto A+G$; unde $D > G$: tum $A+E > B+D > B+G \propto A+H$; unde $E > H$. Quæ erant demonstr.

V. *In progressione Geometrica crescente* A, B, C, D, E *perveniri tandem potest ad terminum* E *quovis dato* Z *majorem.*

Incipiat ab iisdem terminis Progressio Arithm. A, B, F, G, H, continuata quousque ultimus H superet Z (id enim fieri posse claret,) tum vero continuetur Geometrica per terminos totidem, eritque per præced. postremus $E > H > Z$. Q. E. D.

Coroll. Hinc in Progr. Geom. crescente infinitorum terminorum postremus terminus est ∞, per Prop. II. (∞ est Nota Infiniti.)

VI. *In Progress. Geometr. decrescente* A, B, C, D, E *pervenitur tandem ad terminum* E *quovis dato* Z *minorem.*

Constituatur Progressio ascendens Z, T, X, V, T, in ratione B ad A, quousque ultimus terminus T superet A, (quod fieri posse per præced. constat;) tum continuetur altera descendendo per totidem terminos A, B, C, D, E; eritque ultimus $E <$ dato Z. Quia enim Progressiones A, B, C, D, E, & T, V, X, T, Z, per eandem rationem A ad B progrediuntur, & terminos numero æquales habent, erit ex æquo $A . E :: T . Z$. sed $A < T$, per constr. Ergo & $E < Z$. Q. E. D.

Coroll. Hinc in Progr. Geomet. decrescente in infinitum continuata ultimus terminus est o, per Prop. I.

VII. *In omni Progr. Geom.* A, B, C, D, E, *primus terminus est ad secundum, sicut summa omnium excepto ultimo ad summam omnium excepto primo.* $(A . B :: A+B+C+D . B+C+D+E.)$

Quia enim $A . B :: B . C :: C . D :: D . E$. erit per 12. 5. Eucl. $A . B :: A+B+C+D . B+C+D+E$. Q. E. D.

VIII. *Progressionis Geom. cujuscunque* A, B, C, D, E, *summam S invenire.*

Per præc. est $A . B :: S-E . S-A$; quare convertendo $A . A=B :: S-E . A=E$; unde $S-E \propto \frac{A \text{ in } A-E}{A=B}$, & $S \propto \frac{A \text{ in } A=E}{A=B} + E$. (= denotat differen-

differentiam duarum quantitatum, quibus interferitur, cum non definitur, penes utram fit excessus.)

Coroll. Si Progressio Geometr. descendendo continuetur in infinitum, adeoque ultimus terminus per Coroll. VI. evanescat, erit summa omnium $\frac{Aq}{A-B}$: unde liquet, quo pacto infiniti etiam termini finitam summam constituere possunt.

IX. *Si Series infinita continuè proportionalium* A, B, C, D, E, *&c. decrescat in ratione* A *ad* B, *erunt summæ omnium terminorum, omnium demto primo, omnium demtis duobus primis, &c. etiam continuè proportionales, & quidem in eadem ratione* A *ad* B.

Quoniam $A.B::B.C::C.D$, erit tum $Aq.Bq::Bq.Cq$: tum etiam $A.B::A-B.B-C::B-C.C-D$, quare dividendo rationes æquales per æquales, $\frac{Aq}{A-B}.\frac{Bq}{B-C}::\frac{Bq}{B-C}.\frac{Cq}{C-D}$, hoc est per Cor. præced. Summa omnium ad omnes sequentes primum, ut hi ad omnes sequentes secundum. Q. E. D. Et proinde per 19. 5. Eucl. summa omnium ad omnes sequentes primum, ut primus ad secundum. Q. E. D.

X. *Seriei infinitæ fractionum*, $\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{a+2c}{b+2d}, \frac{a+3c}{b+3d}$, *&c. quarum numeratores & denominatores crescunt Progressione Arithmet. ultimus terminus est fractio* $\frac{c}{d}$, *cujus numerator & denominator sunt communes progressionum differentiæ.*

Ad hoc analyticè investigandum consideretur quæsitus terminus ut cognitus, & vocetur t; numerus vero termini ut quæsitus, & dicatur n; eritque ex generatione progressionis terminus optatus $t \infty \frac{a+nc-c}{b+na-d}$, ideoque $n \infty 1 + \frac{bt-a}{c-dt}$, quod æquari debet infinito: & quia numerator hujus fractionis est finitus (nam infinitus esse non potest, aliàs t deberet esse $\infty\ \infty$; ideoque esset $c-dt$, ipsaque adeo fractio negativa quantitas, quod absurdum,) oportet ut denominator sit æqualis nihilo, ac proinde $c \infty dt$, & $t \infty \frac{c}{d}$. Q. E. D.

Brevius ita: Ex seriei genesi patet, terminum infinitesimum esse $\frac{a+\infty c}{b+\infty d} \infty \frac{\infty c}{\infty d} \infty \frac{c}{d}$. Q. E. D.

Coroll. Summa omnium terminorum, sive ultimus primo major

 sit

fit minorve, necessario infinita est; infiniti enim termini minori horum duorum æquales infinitam dant summam: Unde à fortiori, &c.

XI. *Fractionis ad aliam ratio composita est ex ratione directa numeratorum & reciproca denominatorum.*

Nam $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{AD}{BD} . \frac{BC}{BD} :: AD . BC :: A . C + D . B.$ Q. E. D.

XII. *In serie fractionum, quarum numeratores crescunt Progressione Arith. denominatores Geometrica, aut vice versa, ut* $\frac{A}{F} . \frac{A+C}{G} . \frac{A+2C}{H} . \frac{A+3C}{I}$, *aut* $\frac{F}{A} . \frac{G}{A+C} . \frac{H}{A+2C} . \frac{I}{A+3C}$: *Si* N *nomen ordinis ultimi termini ad unitatem majorem rationem habeat, quam* G *ad* G − F, *erit ille terminus ibi sequenti major, hic minor.*

1. *Hyp.* Quia $N . 1 > G . G - F$, erit convertendo $N . N - 1 < G . F$; & $CN . CN - C < G . F$. Ergo $CN - C : in\ G > CN\ in\ F$, ergo fortius (ob $AG > AF$) $A + NC - C : in\ G > A + CN : in\ F$, hoc est, Numerator termini N in $G >$ Numeratore termini sequentis in F: Sed ita se habet terminus N ad terminum sequentem, per præced. Quare terminus N major sequenti, & ita deinceps ab illo omnes. Q. E. D.

2. *Hyp.* Inversis invertendis eodem modo demonstratur.

XIII. *Si infinitæ sint fractiones* $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} . \frac{E}{F} . \frac{G}{H} . \frac{I}{L} . \frac{M}{N} . \frac{O}{P}$. *&c. quarum numeratores crescant progr. Arithm. & denominatores Geom. erit ultimus terminus* 0; *sin illi crescant Geometr. hi Arithm. erit ultimus* ∞.

1. *Hyp.* Si primus terminus secundo non sit major, continuari saltem poterit Progressio, quousque præcedens superet sequentem, per præced. Esto $\frac{G}{H} > \frac{I}{L}$, & sint infiniti continuè proportionales G, I, Q, R, &c. unde propter $H, L, N, P \div$ erunt & ipsæ fractiones $\frac{G}{H} . \frac{I}{L} . \frac{Q}{N} . \frac{R}{P}$ &c. $\because$ quæ ob $\frac{G}{H} > \frac{I}{L}$. in nihilum tandem abeunt per Cor. VI. Quare cum $Q > M$, $R > O$, &c. per IV. multo magis $\frac{G}{H} . \frac{I}{L} . \frac{M}{N} . \frac{O}{P}$, &c. in nihilum abibunt. Q. E. D.

2. *Hyp.* Nisi primus secundo minor sit, continuetur progressio, quousque præcedens sequenti minor fiat, per præced. Esto $\frac{G}{H} < \frac{I}{L}$,

& sint

& sint infiniti H, L, S, T, &c. $\div\!\div$ unde propter G, I, M, O, &c. $\div\!\div$, & ipsæ fractiones $\frac{G}{H}, \frac{I}{L}, \frac{M}{S}, \frac{O}{T}$, &c. proportionales erunt, quæ ob $\frac{G}{H} < \frac{I}{L}$ in infinitum desinunt per Cor. V. Quare cùm $S > N$, $T > P$, &c. per IV. multo magis $\frac{G}{H}, \frac{I}{L}, \frac{M}{N}, \frac{O}{P}$, &c. in infinitum excrescent. Q. E. D.

XIV. *Invenire summam seriei infinitæ fractionum, quarum denominatores crescunt progressione Geometrica quacunque, numeratores verò progrediuntur vel juxta numeros naturales* 1, 2, 3, 4, *&c. vel trigonales* 1, 3, 6, 10, *&c. vel pyramidales* 1, 4, 10, 20, *&c. aut juxta quadratos* 1, 4, 9, 16, *&c. aut cubos* 1, 8, 27, 64, *&c. eorumve æquemultiplices.*

1. *Si Numeratores progrediuntur juxta numeros naturales:*

Summa invenitur, resolvendo seriem propositam A in alias infinitas series B, C, D, E, &c. quæ singulæ geometricè progrediuntur, quarumque summæ (si primam hîc excipias) novam Geometricam progressionem F constituunt per IX. cujus quidem, uti cæterarum, summa per Coroll. VIII. reperitur. En operationem:

$$A \infty \frac{a}{b} + \frac{a+c}{bd} + \frac{a+2c}{bdd} + \frac{a+3c}{bd^3} \text{ \&c.} \infty B + C + D + E + \text{\&c.}$$

$$B \infty \frac{a}{b} + \frac{a}{bd} + \frac{a}{bdd} + \frac{a}{bd^3} \text{ \&c. } \infty \frac{ad}{bd-b}$$

$$C \infty \cdot + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \text{ \&c. } \infty \frac{c}{bd-b}$$

$$D \infty \cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \text{ \&c. } \infty \frac{c}{bdd-bd}$$

$$E \infty \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{c}{bd^3} \text{ \&c. } \infty \frac{c}{bd^3-bdd}$$

$$\text{\&c.} \infty \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \text{ \&c. } \infty \text{ \&c.}$$

$F \infty \frac{cd}{b \text{ in } Q{:}\,d-1}$ cui additus primus terminus $\frac{ad}{bd-b}$ producit totius propositæ seriei A

$$\frac{ad}{b \text{ in } d-1} + \frac{cd}{b \text{ in } Q{:}\,d-1} \infty \text{ summam.}$$

2. *Si Numeratores sunt juxta Trigonales:*

Series proposita G resolvenda est in aliam H, cujus numeratores sint juxta præcedentem hypothesin, hoc modo:

$$G \infty \frac{c}{b} + \frac{3c}{bd} + \frac{6c}{bdd} + \frac{10c}{bd^3} \;\&c.$$

$$\left.\begin{array}{r}
\frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \;\&c. \;\infty\; \frac{cd}{bd-b} \\
+ \frac{2c}{bd} + \frac{2c}{bdd} + \frac{2c}{bd^3} \;\&c. \;\infty\; \frac{2c}{bd-b} \\
+ \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3} \;\&c. \;\infty\; \frac{3c}{bdd-bd} \\
+ \frac{4c}{bd^3} \;\&c. \;\infty\; \frac{4c}{bd^3-bdd} \\
\&c. \;\infty\; \&c.
\end{array}\right\}$$

$H \infty \frac{cd^3}{b \text{ in } C:d-1}$ quandoquidem hæc series ad præced. $\frac{c}{bd} + \frac{2c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3}$ &c. $\infty \frac{cd}{b \text{ in } Q:d-1}$ se habeat ut dd ad $d-1$.

3. *Si Numeratores sunt juxta Pyramidales:*

Series resolvitur in aliam, cujus numeratores progrediuntur juxta Trigonales, quæque ad præcedentem seriem se habet, ut d ad $d-1$; unde summa ejus invenitur $\infty \frac{cd^4}{b \text{ in } QQ:d-1}$. Generaliter, si propositæ seriei numeratores sint juxta figuratos cujuslibet gradus, ejus summa se habebit ad summam similis seriei gradus præcedentis, ut d ad $d-1$: unde reliquarum omnium summam invenire proclive admodum est.

4. *Si Numeratores sunt juxta Quadratos:*

Series L resolvitur in aliam M, cujus numeratores sunt Arithmeticè progressionales, adeoque juxta primam hypothesin:

$$L \infty \frac{c}{b} + \frac{4c}{bd} + \frac{9c}{bdd} + \frac{16c}{bd^3} \;\&c.$$

$$\left.\begin{array}{r}
\frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \;\&c. \;\infty\; \frac{cd}{bd-b} \\
+ \frac{3c}{bd} + \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3} \;\&c. \;\infty\; \frac{3c}{bd-b} \\
+ \frac{5c}{bdd} + \frac{5c}{bd^3} \;\&c. \;\infty\; \frac{5c}{bdd-bd} \\
+ \frac{7c}{bd^3} \;\&c. \;\infty\; \frac{7c}{bd^3-bdd} \\
\&c. \;\infty\; \&c.
\end{array}\right\}
M \infty \frac{cdd}{b \text{ in } Q:d-1} + \frac{2cd}{b \text{ in } C:d-1} \;\infty\; \frac{cd^3 + cdd}{b \text{ in } C:d-1}.$$

5. *Si Numeratores sunt juxta Cubos:*

Series resolvitur in aliam, cujus numeratores sunt Trigonalium sextupli unitate aucti; unde ejus summa juxta secundam hypothesin

ſin invenitur $\frac{cdd}{b \text{ in } Q:d-1} + \frac{6cd3}{b \text{ in } QQ:d-1} \infty \frac{cd4+4cd3+cdd}{b \text{ in } QQ:d-1}$. Exempli loco ſint ſeries ſequentes, Numeratorum

Naturalium	$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}$ &c. $\infty\ 2$
Trigonalium	$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{6}{8}+\frac{10}{16}+\frac{15}{32}$ &c. $\infty\ 4$
Pyramidalium	$\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{10}{8}+\frac{20}{16}+\frac{35}{32}$ &c. $\infty\ 8$
Quadratorum	$\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{9}{8}+\frac{16}{16}+\frac{25}{32}$ &c. $\infty\ 6$
Cuborum . .	$\frac{1}{2}+\frac{8}{4}+\frac{27}{8}+\frac{64}{16}+\frac{125}{32}$ &c. $\infty\ 26$

Coroll. Patet, in omnibus hujusmodi ſeriebus poſtremos terminos in nihilum deſinere, & evaneſcere debere (quod ipſum jam præced. Propoſ. de earum una ex abundanti oſtendimus;) cùm alias illarum ſummæ finitæ eſſe non poſſent.

XV. *Invenire ſummam ſeriei infinitæ fractionum* R, *quarum numeratores conſtituunt ſeriem æqualium, denominatores vero Trigonalium, eorumve æquemultiplicium.*

Si à ſerie harmonicè proportionalium *N*, eademmet multata primo termino *P* ſubtrahatur, exoritur nova ſeries *Q*, cujus denominatores Trigonalium dupli ſunt, cujusque adeo ſumma æqualis erit ipſi primo termino ſeriei Harmonicæ *N*, per Ax. 3.

Operatio talis: A ſerie $N \infty \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c}$ &c.

ſubtracta ſeries	$P \infty \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \frac{a}{6c}$ &c. $\infty\ N - \frac{a}{c}$
relinquit ſeriem	$Q \infty \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c}$ &c. $\infty \frac{a}{c}$
cujus duplum	$R \infty \frac{a}{c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{10c} + \frac{a}{15c}$ &c. $\infty \frac{2a}{c}$

ſeries ſcil. fractionum propoſita, quarum denominatores ſunt numeri Trigonales, eorumve æque-multiplices.

Obſervandum tamen, non ſine cautela hac utendum eſſe methodo: Nam ſi à ſequente ſerie *S* eadem demto primo termino *T* ſubtrahatur, prodibit ſeries *Q*, quæ antea; nec tamen inde ſequitur, ſummam ſeriei *Q*, æqualem eſſe primo termino ſeriei $S \infty \frac{2a}{c}$. Cujus rei ratio eſt, quòd, ſi à ſerie *S* ſubtrahitur ſeries ter-

minorum totidem T, in qua singuli termini postremum præcedentes singulos primum consequentes in altera destruunt, residuum, hoc est resultans series Q, evidenter debet adæquari primo termino seriei S minus ultimo ipsius T; adeoque ipsi primo seriei S absolutè æqualis esse nequit, nisi tum cùm ultimus ipsius T in nihilum desinit, uti quidem desinere perspicuum est in serie P vel N: at non evanescit pariter in serie T vel S, verum est $\infty \frac{a}{c}$, per X. Quin itaque potius summa seriei $Q \infty \frac{2a}{c} - \frac{a}{c} \infty \frac{a}{c}$, ut suprà.

$$S \infty \frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} \text{ \&c.}$$
$$T \infty \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} + \frac{7a}{6c} \text{ \&c.}$$
$$Q \infty \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} \text{ \&c. } \infty \frac{2a}{c} - \frac{a}{c} \infty \frac{a}{c}.$$

XVI. *Summa seriei infinitæ harmonicè progressionalium*, $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ *&c. est infinita.*

Id primus deprehendit Frater: inventa namque per præced. summa seriei $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$, &c. visurus porrò, quid emergeret ex ista serie, $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30}$, &c. si resolveretur methodo Prop. XIV. collegit propositionis veritatem ex absurditate manifesta, quæ sequeretur, si summa seriei harmonicæ finita statueretur. Animadvertit enim,

Ante Fratrem Bernoullium id demum ... nerat Mengolus Bononiensis in Proem. Quadrat. Arithm.

Seriem A, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$, &c. ∞ (fractionibus singulis in alias, quarum numeratores sunt 1, 2, 3, 4, &c. transmutatis) seriei B, $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30} + \frac{6}{42}$, &c. ∞ C + D + E + F, &c.

C. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$, &c. ∞ per præc. $\frac{1}{1}$
D.. $+\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$, &c. ∞ C $- \frac{1}{2} \infty \frac{1}{2}$
E... $+\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$, &c. ∞ D $- \frac{1}{6} \infty \frac{1}{3}$
F...... $+\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$, &c. ∞ E $- \frac{1}{12} \infty \frac{1}{4}$
&c. ∞ &c.

} ∞ G; unde sequitur, seriem G ∞ A, totum parti, si summa finita esset.

Ego

Ego postmodum, cum indicasset, idem ostensivè hunc in modum: Summa seriei infinitæ harmonicæ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, &c. superat datum quemvis numerum. Ergo infinita est, per II. Esto datus numerus *N* quantumcunque magnus: Abscinde à principio seriei aliquot terminos, quorum summa æquet vel superet unam unitatem numeri *N*, & à serie reliqua iterum aliquos abscinde, quorum summa aliam unitatem numeri *N* superet, idque si fieri possit repete toties, quot in numero *N* sunt unitates; sic termini abscissi omnes superabunt totum numerum, multo magis igitur tota series eundem superabit. Si neges, abscissis aliquot reliquos unitatem superare posse, esto primus reliquorum, qui post abscissionem ultimam remanserunt, $\frac{1}{a}$, & sequentes $\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+3}$, &c. Constituatur ad duos primos terminos $\frac{1}{a}$ & $\frac{1}{a+1}$ Progressio Geometrica, cujus ideo singuli post secundum termini singulis respondentibus in Progressione Harmonica minores sunt ob denominatores majores, per IV. & continuetur hæc usque ad $\frac{1}{aa}$ (quod quidem fiet in terminis numero finitis propter a numerum finitum) eritque hæc series Geometrica finita ∞ 1, per VIII. Harmonica itaque terminorum totidem superabit unitatem. Q. E. D.

Coroll. 1. In proposita serie initio sumto à quolibet termino, erunt ab illo deinceps omnes, usque ad illum, cujus locus designatur per quadratum numeri ordinis primi termini, simul sumti unitate majores: sic termini à 2^do^ ad 4^tum^ usque unitatem superant, hinc à 5^to^ ad 25^tum^, hinc à 26 ad 676 (*Q*: 26) hinc à 677 ad 458329 (*Q*: 677) &c. Nam in Geometrica progressione termini his limitibus intercepti unitatem æquant; ergo in Harmonica superant, ubi & plures intercipiuntur & majores; majores quidem uti vidimus; plures, quia denominatores terminorum, cùm sint minores quàm in Geometrica per IV. tardiùs illos limites assequuntur.

2. Patet, omnem aliam seriem harmonicam infinitam, summam quoque exhibere infinitam; ut ex. gr. si loco $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ &c. proponatur $\frac{1}{1000}+\frac{1}{2000}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{4000}$ &c. ubi singuli termini sin-

gulorum sibi respondentium in altera, adeoque & omnes omnium, sunt submillecupli: nam infiniti pars millesima & ipsa infinita est.

3. Summa seriei infinitæ, cujus postremus terminus evanescit, quandoque finita est, quandoque infinita.

4. Sequitur etiam, si modo in Geometriam saltum facere permissum est, spatium Curva Hyperbolica & Asymptotis comprehensum infinitum esse: Secta intelligatur Asymptotos linea à centro *A* in partes æquales infinitas in punctis *B*, *C*, *D*, *E*, &c. è quibus ad curvam educantur rectæ totidem alteri Asymptotôn parallelæ *BM*, *CN*, *DO*, *EP*, &c. & compleantur parallelogramma *AM*, *BN*, *CO*, *DP*, &c. quæ ob basium æqualitatem inter se erunt, ut altitudines, seu ut rectæ *BM*, *CN*, *DO*, *EP*, &c. hoc est, ut $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. ex natura Hyperbolæ; cum igitur summa $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ &c. infinita ostensa sit, erit & summa Parallelogrammorum *AM*, *BN*, *CO*, *DP*, &c. infinita, multoque magis spatium Hyperbolicum, quod Parallelogrammis illis circumscriptum est.

XVII. *Invenire summam serierum Leibnitzianarum*, D. H. I. *aliarumque quarum denominatores sunt numeri Quadrati aut Trigonales, minuti aliis Quadratis vel Trigonalibus.*

Cel. Leibnitius occasione mirabilis suæ Quadraturæ Circuli in principio Actorum Lipf. publicatæ, mentionem injicit summæ quarundam serierum infinitarum, quarum denominatores constituunt seriem quadratorum unitate minutorum, dissimulato quo eam repererat artificio. En breviter totum mysterium:

A serie . . . . $A \infty \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c. subtrahatur ipsamet demtis duobus primis terminis, $B \infty \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ &c. $\infty\ A-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

relinquitur $C \infty \frac{2}{3}+\frac{2}{8}+\frac{2}{15}+\frac{2}{24}+\frac{2}{35}$ &c. $\infty\ A-B \infty \frac{1}{1}+\frac{1}{2} \infty \frac{3}{2}$

& propterea $D \infty \frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}$ &c. $\infty\ \frac{1}{2}C \infty \frac{3}{4}$

A serie . . . $E \infty \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$ &c. subtrahatur eadem demto primo termino, ... $F \infty \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}$ &c. $\infty\ E-1$

relin-

relinquitur $G \infty \frac{2}{3}+\frac{2}{15}+\frac{2}{35}+\frac{2}{63}+\frac{2}{99}$ &c. $\infty E-F \infty 1$

& propterea . . $H \infty \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$ &c. $\infty \frac{1}{2}G \infty \frac{1}{2}$,

& proinde etiam $I \infty \frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}$ &c. $\infty D-H \infty \frac{3}{4}-\frac{1}{2} \infty \frac{1}{4}$

Quod ipsum quoque sic ostenditur:

A serie . . . $L \infty \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}$ &c. subtrahatur eadem demto primo termino, . . . $M \infty \frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ &c. $\infty L-\frac{1}{2}$

relinquitur $N \infty \frac{2}{8}+\frac{2}{24}+\frac{2}{48}+\frac{2}{80}+\frac{2}{120}$ &c. $\infty L-M \infty \frac{1}{2}$

& proinde . . . $I \infty \frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}$ &c. $\infty \frac{1}{2}N \infty \frac{1}{4}$, ut anteà.

Memorabile autem prorsus est, quòd summa seriei D, $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}$ &c. (cujus denominatores sunt numeri quadrati 4, 9, 16, 25, 36, &c. unitate minuti) invenitur $\frac{3}{4}$, quin & excerptis per saltum alternis terminis, summa seriei H, $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}$ &c. $\infty \frac{1}{2}$; at si ex hâc iterum simplici saltu terminos loco pari positos excerpas, ut relinquatur $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ &c. ejus seriei infinitæ summa est vera magnitudo circuli nullo numero exprimibilis, sumto vid. quadrato diametri $\infty \frac{1}{2}$.

Cæterum generaliter invenire possumus summam cujuslibet seriei, cujus numeratores constituunt seriem æqualium, & denominatores seriem quadratorum minutorum communi aliquo quadrato Q. aut etiam seriem Trigonalium minutorum communi aliquo numero Trigonali T: si observemus, ejusmodi series nasci per subductionem seriei harmonicæ truncatæ ab initio tot terminis (quot indicat ibi duplum radicis quadratæ communis quadrati Q, hìc duplum unitate auctum radicis trigonalis numeri trigonalis T) à se-ipsa integra:

Ex.gr. ad inveniendam summam seriei D, $\frac{1}{7}+\frac{1}{16}+\frac{1}{27}+\frac{1}{40}+\frac{1}{55}$ &c.
cujus denominatores sunt quadrati, 16, 25, 36, 49, 64, 81, &c.
minuti communi Quadrato Q. . . 9, 9, 9, 9, 9, 9.
(cujus Radix Q. 3, & duplum 6.) 7, 16, 27, 40, 55, 72, &c.

 A serie

A ſerie . . . . $A \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ &c. ſubtrahatur eadem multata ſex

primis terminis . . $B \infty \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}$ &c.

relinquitur . . . $C \infty \frac{6}{7} + \frac{6}{16} + \frac{6}{27} + \frac{6}{40} + \frac{6}{55} + \frac{6}{72}$ &c. $\infty A - B \infty$

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \infty 2\frac{9}{20}$

adeoque . . . . $D \infty \frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \frac{1}{55} + \frac{1}{72}$ &c. $\infty \frac{1}{6} C \infty \frac{49}{120}$.

Rurſus pro invenienda ſumma ſeriei E, $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{39}$ &c.
cujus denominatores ſunt Trigonales 10, 15, 21, 28, 36, 45, &c.
minuti communi Trigonali T . . . . 6, 6, 6, 6, 6, 6, &c.
(cujus Radix Trigon. 3. & duplum 4, 9, 15, 22, 30, 39, &c.
unitate auctum 7.)

A ſerie . . . $A \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ &c. ſubtrahatur eadem truncata ſeptem primis terminis

$F \infty \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14}$ &c.

relinquitur $G \infty \frac{7}{8} + \frac{7}{18} + \frac{7}{30} + \frac{7}{44} + \frac{7}{60} + \frac{7}{78} + \frac{7}{98}$ &c. $\infty A - F \infty$

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \infty \frac{363}{140}$

adeoque . . $E \infty \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{39} + \frac{1}{47}$ &c. $\infty \frac{2}{7} G \infty \frac{363}{490}$

Atque ita per hanc Propoſitionem inveniri poſſunt ſummæ ſerierum, cum denominatores ſunt vel numeri Trigonales minuti alio Trigonali, vel Quadrati minuti alio Quadrato; ut & per XV. quando ſunt puri Trigonales, ut in ſerie $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ &c. at, quod notatu dignum, quando ſunt puri Quadrati, ut in ſerie $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ &c. difficilior eſt, quàm quis expectaverit, ſummæ perveſtigatio, quam tamen finitam eſſe, ex altera, qua manifeſto minor eſt, colligimus: Si quis inveniat nobisque communicet, quod induſtriam noſtram eluſit hactenus, magnas de nobis gratias feret.

Hoc ſaltem monere adhuc liceat, quod ſpatium Hyperboloide Cubicali (cujus natura exprimitur per æquationem $xxy \infty aab$, hoc eſt, in qua Quadrata abſciſſarum ex Aſymptotis ſunt in applicatarum ratione

ratione reciproca,) & Asymptotis suis comprehensum, eodem modo ex finita hujus seriei summa finitum esse demonstrari possit, quo simile spatium in ipsi Hyperbola ex infinita seriei Harmonicæ summa infinitum ostensum est.

XVIII. *Invenire summam seriei infinitæ reciprocæ numerorum Trigonalium, Pyramidalium, Trianguli-Pyramidalium, Pyramidi-Pyramidalium, & figuratorum altioris cujusvis gradus in infinitum: atque infinitarum summarum summam.*

1. Quemadmodum si à serie fractionum harmonicè progressionalium, hoc est, serie reciproca numerorum naturalium A, eadem multata primo termino subtrahatur, nascitur series fractionum, quarum numeratores sunt *unitates*, denominatores *trigonalium dupli*; ut patet ex demonstr. XV. Ita si à serie reciproca trigonalium B, eadem truncata primo termino subducatur, exoritur series fractionum, quarum numeratores progrediuntur juxta numeros naturales 2. 3. 4. 5. &c. sed quæ reducuntur ad fractiones, quarum omnium numeratores sunt *binarii*, denominatores vero *pyramidalium tripli*; unde ipsa series ad seriem reciprocam pyramidalium C, ut $\frac{2}{3}$ ad 1. Pariter si à serie hac reciproca pyramidalium, ipsamet mutilata primo termino subducatur, relinquitur series fractionum, quarum numeratores progrediuntur juxta numeros trigonales 3. 6. 10. 15. &c. sed quæ reduci possunt ad alias, quarum numeratores omnes sunt *ternarii*, denominatores vero *trianguli-pyramidalium quadrupli*, unde ipsa series ad seriem reciprocam trianguli-pyramidalium D, ut $\frac{3}{4}$ ad 1: Et sic deinceps in infinitum. Quocirca cum singulæ hæ per subductionem genitæ series, quarum numeratores sunt unitatum, denominatores figuratorum multipli, per Ax. 3. æquipolleant unitati, ipsæ figuratorum series reciprocæ ordine dabunt summas, ut sequitur:

A. Natur. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ &c. $\infty \frac{1}{0} \infty 1\frac{1}{0}$, per XVI.

B. Trigon. $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}$ &c. $\infty \frac{2}{1} \infty 1\frac{1}{1}$, per XV.

C. Pyramid. $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{6}{56}$ &c. $\infty \frac{3}{2} \infty 1\frac{1}{2}$.

D. Triang.Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}$ &c. $\infty \frac{4}{3} \infty 1\frac{1}{3}$.

E. Pyr. Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}+\frac{1}{126}+\frac{1}{252}$ &c. $\infty \frac{5}{4} \infty 1\frac{1}{4}$.

2. Sum-

2. Summæ hæ à ſecunda ſerie ordine collectæ ſunt $1\frac{1}{1}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, &c. unde ſumma ſummarum eſt $1\frac{1}{1} + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4} +$ &c. quæ infinita eſt: quin & demtis ſingularum ſerierum primis terminis ſeu unitatibus, ſumma fit $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ &c. quæ itidem infinita exiſtit, per XVI. at demtis inſuper ſecundis terminis $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ &c. ſumma evadit finita & æqualis $1 + \frac{1}{2} \propto \frac{3}{2}$ per Axiom. 3.

XIX. *Invenire ſummam ſeriei finitæ reciprocæ Trigonalium, Pyramidalium, Trianguli-Pyramidalium, Pyram. Pyramidalium, & figuratorum altioris cujusvis gradus in infinitum.*

Poſito in qualibet ſerie numero terminorum n, poſtremi termini in ſeriebus directis numerorum naturalium, trigon. pyramid. (per ea quæ demonſtrabuntur alibi) ſunt ordine hi, qui ſequuntur: (denotantibus hic & ubique punctulis continuam multiplicationem quantitatum, quibus interſeruntur.)

$$n, \quad \frac{n.\overline{n+1}}{1.2}, \quad \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}, \quad \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1.2.3.4}, \text{ \&c.}$$

& qui hos immediatè excipiunt, ſunt iſti:

$$\overline{n+1}, \quad \frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2}, \quad \frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1.2.3}, \quad \frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}.\overline{n+4}}{1.2.3.4} \text{ \&c.}$$

ac propterea erunt ultimi termini in eorundem ſeriebus reciprocis iſti:

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1.2}{n.\overline{n+1}}, \quad \frac{1.2.3}{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}, \quad \frac{1.2.3.4}{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}, \text{ \&c.}$$

& qui hos immediatè ſequuntur,

$$\frac{1}{\overline{n+1}}, \quad \frac{1.2}{\overline{n+1}.\overline{n+2}}, \quad \frac{1.2.3}{\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}, \quad \frac{1.2.3.4}{\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}.\overline{n+4}}, \text{\&c.}$$

Jam ſi à qualibet ſerie reciproca eadem ipſa truncata ab initio & aucta in fine uno termino methodo Prop. XV. ſubtrahatur, ſubducto ſigillatim ſecundo termino à primo, tertio à ſecundo, ſequente ultimum ab ultimo, naſcitur ſeries terminorum totidem, quæ per ea quæ in præced. Propoſ. dicta ſunt, ſeriei reciprocæ figuratorum gradus ſequentis aut ſubdupla eſt, aut ſubſeſquialtera, aut ſubſeſquitertia, &c. atque inſuper per obſervata Propoſ. XV. æqualis primo termino minus ſequente ultimum ejus ſeriei, per cujus ſubductionem nata fuit: unde ipſa ſumma ſeriei finitæ reciprocæ figuratorum quorumcunque obtinetur facile, ut ſequitur;

B. Trigon. $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ &c. usque ad $\frac{1\cdot 2}{n\cdot n+1} \infty \frac{2}{1}-\frac{2}{1}$ in
$\frac{1}{n+1} \qquad \infty \frac{2}{1}-\frac{2}{n+1}$

C. Pyram. $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}$ &c. -- $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{n\cdot n+1\cdot n+2} \infty \frac{3}{2}-\frac{3}{2}$ in
$\frac{1\cdot 2}{n+1\cdot n+2} \quad \infty \frac{3}{2}-\frac{1\cdot 3}{n+1\cdot n+2}$

D. △. Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}$ &c. $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{n\cdot n+1\cdot n+2\cdot n+3} \infty \frac{4}{3}-\frac{4}{3}$ in
$\frac{1\cdot 2\cdot 3}{n+1\cdot n+2\cdot n+3} \infty \frac{4}{3}-\frac{1\cdot 2\cdot 4}{n+1\cdot n+2\cdot n+3}$

E. Py. Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}$ &c. $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{n\cdot n+1\cdots n+4} \infty \frac{5}{4}-\frac{5}{4}$ in
$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{n+1\cdots n+4} \infty \frac{5}{4}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{n+1\cdots n+4}$

XX. *Invenire summam seriei infinitæ reciprocæ Trigonalium, Pyramidalium, Triang. Pyramidalium, &c. multatæ terminis initialibus quotlibet: & infinitarum summarum summam.*

1. Summa seriei infinitæ integræ Trigonalium, Pyramidalium, Triang. Pyramidalium, &c. est $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$, &c. per XVIII. si ex unaquaque serie ab initio abscindantur n termini, summa abscissorum est $\frac{2}{1}-\frac{2}{n+1}$, $\frac{3}{2}-\frac{1\cdot 3}{n+1\cdot n+2}$, $\frac{4}{3}-\frac{1\cdot 2\cdot 4}{n+1\cdot n+2\cdot n+3}$, $\frac{5}{4}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{n+1\cdot n+2\cdot n+3\cdot n+4}$, &c. per XIX. subtracta ergo hac à summa omnium, erit summa reliquorum $\frac{2}{n+1}$, $\frac{1\cdot 3}{n+1\cdot n+2}$, $\frac{1\cdot 2\cdot 4}{n+1\cdot n+2\cdot n+3}$, $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{n+1\cdot n+2\cdot n+3\cdot n+4}$, &c.

2. Summa serierum omnium mutilatarum seu nullo seu uno termino est infinita, duobus terminis est $\frac{3}{2}$ per XVIII. Hinc si demas tertios terminos (qui constituunt seriem trigonalium B truncatam duobus terminis, cujus summa per eandem est $\frac{2}{3}$) erit reliquorum omnium summa $\frac{3}{2}-\frac{2}{3} \infty \frac{5}{6} \infty \frac{5}{2\cdot 3}$. Hinc denuo si quartos terminos auferas (qui formant seriem pyramidalium C itidem truncatam duobus terminis, summamque proin per præced. efficiunt $\frac{2}{8}$)

relinquetur cæterorum omnium ſumma $\frac{5}{6}-\frac{2}{8}\infty\frac{7}{12}\infty\frac{7}{3.4}$. Hinc iterum ſi quintos terminos reſeces, exibit cæterorum ſumma $\frac{9}{4.5}$; ſi ſextos, $\frac{11}{5.6}$; ſeptimos, $\frac{13}{6.7}$; &c. adeoque univerſaliter ſi ex unaquaque ſerie tollantur n termini, erit mutilatarum ita ſerierum omnium ſumma reliqua $\frac{2n-1}{n-1.n}$.

Coroll. Series $\frac{2}{n+1}+\frac{1.3}{n+1.n+2}+\frac{1.2.4}{n+1.n+2.n+3}+\frac{1.2.3.5}{n+1.n+2.n+3.n+4}+$ &c. ſive, $\frac{2}{1}$ in $\frac{1}{n+1}+\frac{3}{2}$ in $\frac{1.2}{n+1.n+2}+\frac{4}{3}$ in $\frac{1.2.3}{n+1.n+2.n+3}+\frac{5}{4}$ in $\frac{1.2.3.4}{n+1.\text{——}.n+4}+$ &c. $\infty\frac{2n-1}{n-1.n}$: ſingula enim ſeriei hujus membra ſingulas figuratarum ſerierum mutilatarum ſummas exprimunt, per 1. part. hujus; adeoque & omnia omnium.

XXI. *Seriei hujus*, $\frac{1a}{1.2}+\frac{2a}{1.2.3}+\frac{3a}{1.2.3.4}+\frac{4a}{1.2.3.4.5}+$ &c: *hoc eſt*, $\frac{a}{2}+\frac{a}{1.3}+\frac{a}{1.2.4}+\frac{a}{1.2.3.5}+$ &c: *ſummam invenire.*

Series hæc naſcitur ſubductione ſequentis ſeriei, $\frac{a}{1}+\frac{a}{1.2}+\frac{a}{1.2.3}+\frac{a}{1.2.3.4}+$ &c: multatæ primo termino à ſeipſa integra, methodo Prop. XV. quare ejus ſumma $\infty\ a$, primo ſc. termino hujus, per Axioma 3.

Coroll. Hinc $\frac{1}{1.2}+\frac{4}{1.2.3}+\frac{9}{1.2.3.4}+\frac{16}{1.2.3.4.5}+$&c. ($\infty$ F+G+H+I+&c.) $\infty\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+$ &c.

Nam F. $\frac{1}{1.2}+\frac{2}{1.2.3}+\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{4}{1.2.3.4.5}+$&c. $\infty\frac{1}{1}$ per XXI.

G. - - $+\frac{2}{1.2.3}+\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{4}{1.2.3.4.5}+$&c. ∞ F $-\frac{1}{1.2}\infty\frac{1}{1.2}$

H. - - - - - $+\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{4}{1.2.3.4.5}+$&c. ∞ G $-\frac{2}{1.2.3}\infty\frac{1}{1.2.3}$

I. - - - - - - - - - $+\frac{4}{1.2.3.4.5}+$&c. ∞ H $-\frac{3}{1.2.3.4}\infty\frac{1}{1.2.3.4}$

XXII.

XXII. *Invenire summas serierum K, L, M, N, quarum numeratores sunt Arithmeticè progressionales, denominatores Trigonalium integrorum aut Quadratorum unitate minutorum quadrata.*

$$K \infty \frac{3}{\Box 1} + \frac{5}{\Box 3} + \frac{7}{\Box 6} + \frac{9}{\Box 10} + \frac{11}{\Box 15} + \frac{13}{\Box 21} + \&c.$$

$$L \infty \frac{2}{\Box 3} + \frac{3}{\Box 8} + \frac{4}{\Box 15} + \frac{5}{\Box 24} + \frac{6}{\Box 35} + \frac{7}{\Box 48} + \&c.$$

$$M \infty \frac{1}{\Box 3} + \frac{2}{\Box 15} + \frac{3}{\Box 35} + \frac{4}{\Box 63} + \frac{5}{\Box 99} + \frac{6}{\Box 143} + \&c.$$

$$N \infty \frac{3}{\Box 3} + \frac{5}{\Box 24} + \frac{7}{\Box 48} + \frac{9}{\Box 80} + \frac{11}{\Box 120} + \frac{13}{\Box 168} + \&c.$$

Per ſubductionem ſeriei $\frac{1}{\Box 1} + \frac{1}{\Box 2} + \frac{1}{\Box 3} + \frac{1}{\Box 4} + \frac{1}{\Box 5} + \frac{1}{\Box 6} + \&c.$ mutilatæ primo termino à ſeipſa integra naſcitur ſeries aliqua, cujus termini ſunt ſubquadrupli terminorum reſpondentium ſeriei K; unde per Ax. 3. ſeries K ∞ 4 in $\frac{1}{\Box 1} \infty 4$.

Per ſubductionem vero ejusdem ſeriei mutilatæ duobus primis terminis à ſeipſa integra oritur ſeries, quæ quadrupla eſt ſeriei L; unde per id. Ax. ſeries L $\infty \frac{1}{4}$ *in*: $\frac{1}{\Box 1} + \frac{1}{\Box 2} \infty \frac{5}{16}$.

Denique per ſubductionem ſeriei $\frac{1}{\Box 1} + \frac{1}{\Box 3} + \frac{1}{\Box 5} + \frac{1}{\Box 7} + \frac{1}{\Box 9} +$ &c. multatæ primo termino à ſeipſa integra emergit alia, quæ octupla eſt ſeriei M, quare per 3. Ax. ſeries M $\infty \frac{1}{8}$ *in* $\frac{1}{\Box 1} \infty \frac{1}{8}$: & propterea duplum ſeriei M, hoc eſt, omnes termini locorum imparium ſeriei L $\infty \frac{1}{4}$; adeoque reliqui termini ejusdem ſeriei, hoc eſt, ipſa ſeries N $\infty \frac{5}{16} - \frac{1}{4} \infty \frac{1}{16}$.

XXIII. *Invenire ſummas ſerierum Q & R, item V & X, &c. quarum denominatores ſunt termini integri progreſſionis quadrupla, noncupla, &c. numeratores vero termini progreſſionis dupla, tripla, &c. unitate tum minuti, tum aucti.*

Operatio talis:

$$\left.\begin{array}{l} O \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \&c. \infty 2 \\ P \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \&c. \infty \frac{4}{3} \end{array}\right\} \text{per Cor. VIII.}$$

$$Q \infty \frac{1-1\infty0}{1}+\frac{2-1\infty1}{4}+\frac{4-1\infty3}{16}+\frac{8-1\infty7}{64}+\frac{16-1\infty15}{256}+\&c. \infty O-P \infty 2-\tfrac{4}{3} \infty \tfrac{2}{3}$$

$$R \infty \frac{1+1\infty2}{1}+\frac{2+1\infty3}{4}+\frac{4+1\infty5}{16}+\frac{8+1\infty9}{64}+\frac{16+1\infty17}{256}+\&c. \infty O+P \infty 2+\tfrac{4}{3} \infty \tfrac{10}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} S \infty \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\&c. \infty \frac{3}{2} \\ T \infty \frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+\frac{1}{6561}+\&c. \infty \frac{9}{8} \end{array}\right\} \text{per Corol. VIII.}$$

$$V \infty \frac{1-1\infty0}{1}+\frac{3-1\infty2}{9}+\frac{9-1\infty8}{81}+\frac{27-1\infty26}{729}+\frac{81-1\infty80}{6561}+\&c. \infty S-T \infty \tfrac{3}{2}-\tfrac{9}{8} \infty \tfrac{3}{8}$$

$$X \infty \frac{1+1\infty2}{1}+\frac{3+1\infty4}{9}+\frac{9+1\infty10}{81}+\frac{27+1\infty28}{729}+\frac{81+1\infty82}{6561}+\&c. \infty S+T \infty \tfrac{3}{2}+\tfrac{9}{8} \infty \tfrac{21}{8}$$

Idem inveniri poteſt, reſolvendo ſeries propoſitas Q, R; V & X methodo Prop. XIV. Exempli loco eſto ſeries

$$Q \infty \tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{16}+\tfrac{7}{64}+\tfrac{15}{256}+\&c. \infty Y+Z+\Pi+\Sigma+\&c.$$

$$\left.\begin{array}{l} Y \infty \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\&c. \infty \text{ per Coroll. VIII. } \frac{1}{3} \\ Z \infty \text{-- } +\frac{2}{16}+\frac{2}{64}+\frac{2}{256}+\&c. \infty 2Y-\frac{2}{4} \infty \frac{2}{3}-\frac{2}{4} \infty \frac{1}{6} \\ \Pi \infty \text{- - - } +\frac{4}{64}+\frac{4}{256}+\&c. \infty 2Z-\frac{4}{16} \infty \frac{2}{6}-\frac{4}{16} \infty \frac{1}{12} \\ \Sigma \infty \text{- - - - - - } +\frac{8}{256}+\&c. \infty 2\Pi-\frac{8}{64} \infty \frac{2}{12}-\frac{8}{64} \infty \frac{1}{24} \\ \&c. \infty \text{- - - - - - - - - } \&c. \text{ - - - - - - - - } \infty \&c. \end{array}\right\} \frac{2}{3} \text{ per Coroll. VIII.}$$

XXIV. *In ſerie quavis infinita, cujus numeratores omnes ſunt æquales, denominatores vel numeri naturales, vel eorundem quadrata, cubi, aut alia quæcunque poteſtas, ſumma terminorum omnium in locis imparibus eſt ad ſummam omnium in paribus, ut ſimilis poteſtas binarii unitate mutata ad unitatem.*

Putà in numeris naturalibus, ut 1 ad 1; in quadratis ut 3 ad 1; in cubis ut 7 ad 1; in biquadratis ut 15 ad 1; &c.

Modus inveſtigandi talis:

In Numeris Naturalibus:

Series iſta $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+$ &c. æquatur ſuis partibus, videl. ſeriebus $A+B+C+D+$ &c.

$$\left.\begin{array}{l} A \infty \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\&c. \infty \frac{2}{1} \\ B \infty \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\&c. \infty \frac{2}{3} \\ C \infty \frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\&c. \infty \frac{2}{5} \\ D \infty \frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}+\&c. \infty \frac{2}{7} \end{array}\right\} \text{per Cor. VIII.}$$

Eſt ergo $\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+$ &c. æqualis, ideoque $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+$ &c. dimidia ſeriei propoſitæ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$

$\frac{1}{4} +$ &c. hoc est, summa terminorum in locis imparibus dimidia seriei totius, & proinde æqualis summæ reliquorum $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} +$ &c.

Patet hinc rursum veritas Prop. XVI. cum enim $\frac{1}{1} > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$, &c. erit $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} +$ &c. $> \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} +$ &c. cui tamen æqualis modo ostensa est; quæ utique conciliari nequeunt, nisi summa utriusque seriei statuatur infinita, hoc est, tanta ut quæ inter illas intercedit differentia, rationem æqualitatis destruere non possit.

In Numeris Quadratis:

Series $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} +$ &c. ∞ E + F + G + H + &c.

$$\left.\begin{aligned} E &\infty \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \text{\&c.} \infty \tfrac{4}{3.1} \\ F &\infty \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{144} + \tfrac{1}{576} + \text{\&c.} \infty \tfrac{4}{3.9} \\ G &\infty \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{100} + \tfrac{1}{400} + \tfrac{1}{1600} + \text{\&c.} \infty \tfrac{4}{3.25} \\ H &\infty \tfrac{1}{49} + \tfrac{1}{196} + \tfrac{1}{784} + \tfrac{1}{3136} + \text{\&c.} \infty \tfrac{4}{3.49} \end{aligned}\right\} \text{per Cor. VIII.}$$

Est ergo $\frac{4}{3.1} + \frac{4}{3.9} + \frac{4}{3.25} + \frac{4}{3.49} +$ &c. $\infty \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} +$ &c. adeoque prioris subsesquitertia, hoc est, $\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} +$ &c. æqualis $\frac{3}{4}$ posterioris, hoc est, termini omnes locorum imparium in serie proposita constituunt tres quartas partes totius seriei, & reliqui unam: quare summa terminorum illorum ad summam horum, ut 3 ad 1.

Eadem investigandi methodus observetur in reliquis potestatibus.

Aliter & universaliter ita:

$$x \infty \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} \text{ \&c.}$$

$$y \infty \frac{1}{1^m} \quad + \frac{1}{3^m} \quad + \frac{1}{5^m} \quad \text{\&c.}$$

$$x-y \infty + \frac{1}{2^m}\left(\frac{1}{2^m 1^m}\right) + \frac{1}{4^m}\left(\frac{1}{2^m 2^m}\right) + \frac{1}{6^m}\left(\frac{1}{2^m 3^m}\right) \&c.$$

$$2^m x - 2^m y \infty + \frac{1}{1^m} \quad + \frac{1}{2^m} \quad + \frac{1}{3^m} \&c. \ \infty\ x$$

unde $2^m x - x \infty 2^m y$, & $y \infty x - \frac{x}{2^m}$, & $x - y \infty \frac{x}{2^m}$, ergo y.

$x - y :: x - \frac{x}{2^m} . \frac{x}{2^m} :: 1 - \frac{1}{2^m} . \frac{1}{2^m} :: 2^m - 1 . 1.$

Schol. Liquet hinc, quod summæ duarum serierum (etiamsi incognitæ) possint ad se invicem habere rationem cognitam. vid. Prop. XVII. sub fin. Extendit se autem demonstratio ad potestatum radices sive ad potestates fractas non minus ac integras: sic ex. gr. colligimus, in serie $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{27}} + \frac{1}{\sqrt{64}} + \frac{1}{\sqrt{125}} +$ &c. (ubi denominatores sunt cuborum radices quadratæ) omnes terminos locorum imparium ad omnes parium esse, ut $\sqrt{8} - 1$ ad 1. Mirabile verò est, quod in serie $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} +$ &c. (cujus summa infinita est, ceu major serie $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ &c. ob denominatores minores) termini locorum imparium ad terminos parium juxta regulam inveniuntur habere rationem $\sqrt{2} - 1$ ad 1. minoris sc. ad majus, cùm tamen illi cum his sigillatim collati iisdem manifesto sint majores: cujus ἐναντιοφανείας rationem, etsi ex infiniti natura finito intellectui comprehendi non posse videatur, nos tamen satis perspectam habemus. Idem vero de similibus seriebus aliis, quæ infinitam summam habent, intelligendum.

XXV. *Series Thesis X,* $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} + \frac{a+2c}{b+2d} - \frac{a+3c}{b+3d}$; *& alia Harmonica terminorum totidem & denominatorum eorundem,* $\frac{f}{b} - \frac{f}{b+d} + \frac{f}{b+2d} - \frac{f}{b+3d}$; *signis + & — alternatim se excipientibus, sumtoque* $f \infty a - \frac{bc}{d}$, *equales summas habent.*

Etenim

Etenim ſubtrahendo terminos locorum parium à terminis imparium, provenit eadem utrobique ſeries, $\frac{ad-bc}{bb+bd} + \frac{ad-bc}{bb+5bd+6dd}$, ſive $\frac{df}{bb+bd} + \frac{df}{bb+5bd+6dd}$, &c.

Eſto ex.gr. ſeries th. X. $\frac{3}{1} - \frac{5}{2} + \frac{7}{3} - \frac{9}{4} + \frac{11}{5} - \frac{13}{6}$, poſitoq; $f \infty 3-2 \infty 1$,

ſeries harmonica, $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$, erit

ſumma utriusque $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30}$, per ſaltum excerpta ex ſerie Q. th. XV.

XXVI. *Seriei infinitæ fractionum* K *(quarum denominatores creſcunt progreſſione Geometrica, hoc eſt, ſequentes præcedentium ſunt æque-multiplices exactè, numeratores verò præcedentium æque-multiplices aucti vel minuti communi quodam numero, ſummam ultimumve terminum reperire.*

($\pm$ denotat vel ubique + vel ubique —)

$$K \infty \frac{a}{c} + \frac{ab \pm d}{cm} + \frac{abb \pm bd \pm d}{cmm} + \frac{ab^3 \pm bbd \pm bd \pm d}{cm^3} + \frac{ab^4 \pm b^3d \pm bbd \pm bd \pm d}{cm^4} + \&c.$$

1. Summa ſeriei invenitur, reſolvendo illam methodo Prop. XIV. in ſeries fractionum purè proportionalium L + M + N + O + P + &c.

$$\left.\begin{array}{l} L \infty \frac{a}{c} + \frac{ab}{cm} + \frac{abb}{cmm} + \frac{ab^3}{cm^3} + \frac{ab^4}{cm^4} + \&c. \infty + \frac{am}{m-b : \text{in } c} \\ M \infty \text{--} \pm \frac{d}{cm} \pm \frac{bd}{cmm} \pm \frac{bbd}{cm^3} \pm \frac{b^3d}{cm^4} \pm \&c. \infty \pm \frac{d}{m-b : \text{in } c} \\ N \infty \text{- - -} \pm \frac{d}{cmm} \pm \frac{bd}{cm^3} \pm \frac{bbd}{cm^4} \pm \&c. \infty \pm \frac{d}{m-b : \text{in } mc} \\ O \infty \text{- - - - - - -} \pm \frac{d}{cm^3} \pm \frac{bd}{cm^4} \pm \&c. \infty \pm \frac{d}{m-b : \text{in } mmc} \\ P \infty \text{- - - - - - - - - - -} \pm \frac{d}{cm^4} \pm \&c. \infty \pm \frac{d}{m-b : \text{in } m^3c} \\ \&c. \infty \text{- - - - - - - - - - - - - - -} \pm \&c. \infty \pm \quad \&c. \end{array}\right\} \text{per Cor. VIII.}$$

Summæ ſerierum M, N, O, P, &c. novam progreſſionem Geometricam conſtituunt, cujus ſumma per Coroll. VIII. eſt $\frac{md}{m-1 : \text{in } m-b : \text{in } c}$, quæ ſummæ ſeriei L $\frac{am}{m-b : \text{in } c}$ addita vel ſubtracta efficit $\frac{amm - am \pm md}{m-1 : m-b : \text{in } c}$ ſummam omnium ſerierum L, M, N, &c. hoc eſt, ipſius ſeriei propoſitæ K.

2. Obſer-

2. Observandum, si $m > b$, summam esse finitam, adeoque ultimum seriei terminum evanescere, vid. Cor. XIV.

Sin $m < b$, & summa infinita est, & ultimus quoque terminus est infinitus; tum enim singulæ progressiones Geometricæ L, M, N, &c. sunt crescentes: confer Prop. V.

At existente $m = b$, summa quidem infinita est, sed postremus terminus finitus: tum enim surrogato m in locum b, secundus terminus fit $\frac{am \pm d}{cm}$, hoc est, $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm}$: tertius $\frac{amm \pm md \pm d}{cmm}$, hoc est, $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm} \pm \frac{d}{cmm}$: quartus $\frac{am3 \pm mmd \pm md \pm d}{cm3}$, hoc est, $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm} \pm \frac{d}{cmm} \pm \frac{d}{cm3}$: atque ita postremus $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm} \pm \frac{d}{cmm} \pm \frac{d}{cm3} \pm \frac{d}{cm4} \pm$ &c. in infinitum: unde patet, terminum infinitesimum resolvi in $\frac{a}{c} \pm$ serie infinitorum Geometricè progressionalium in ratione m ad 1, quorum summa per Cor. VIII. est $\frac{d}{m - 1 : \mathrm{in}\, c}$, quæ ipsi $\frac{a}{c}$ addita vel subtracta efficit terminum infinitesimum $\frac{am - a \pm d}{m - 1 : \mathrm{in}\, c}$, cujus numerator differentiam numeratorum primi & secundi termini, uti & denominator denominatorum eorundem differentiam exprimit: quare cùm ex Prop. X. manifestum sit, terminum ultimum hujus progressionis

$$Q = \frac{a}{c},\ \frac{am \pm d}{cm},\ \frac{2am - a \pm 2d}{2cm - c},\ \frac{3am - 2a \pm 3d}{3cm - 2c},\ \frac{4am - 3a \pm 4d}{4cm - 3c},\ \&c.$$

$$\text{sive}\ \frac{a}{c},\ \frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm},\ \frac{a}{c} \pm \frac{2d}{2cm - c},\ \frac{a}{c} \pm \frac{3d}{3mc - 2c},\ \frac{a}{c} \pm \frac{4d}{4cm - 3c},\ \&c.$$

itidem esse $\frac{am - a \pm d}{m - 1 : \mathrm{in}\, c}$ sive $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{m - 1 : \mathrm{in}\, c}$; sequitur in utraque progressione K & Q, primis duobus terminis existentibus iisdem ultimos quoque esse pares, quamvis incrementa vel decrementa prioris magis subitanea sint, quandoquidem ejus termini non nisi per saltum ex posteriore sunt excerpti: Invenio enim, quod memorabile est, tertium terminum seriei K convenire cum termino $m + 2$, quartum cum $mm + m + 2$, quintum cum $m3 + mm + m + 2$, sextum cum $m4 + m3 + mm + m + 2$ seriei Q, & sic deinceps; uti patere poterit ex subjunctis seriebus, ubi a valet 2, c 3, b vel m 3, & d 1.

K $=$

K ꝏ $\frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{22}{27}, \frac{67}{81}, \frac{202}{243}$, &c. ultimus $\frac{5}{6}$.

Q ꝏ $\frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{12}{15}, \frac{17}{21}, \frac{22}{27}, \frac{27}{33}, \frac{32}{39}, \frac{37}{45}, \frac{42}{51}, \frac{47}{57}, \frac{52}{63}, \frac{57}{69}, \frac{62}{75}, \frac{67}{81}$, &c. ultimus $\frac{5}{6}$.

Intellige vero, quæ dicta sunt de summa ultimoque termino seriei K, si numeratores præcedentium sunt æque-multiplices aucti communi numero d; vel diminuti quidem eodem numero, at insuper $ab > a + d$. Nam si sit ab ꝏ $a + d$, æquivalebunt singuli numeratores ipsi a, summaque seriei fiet finita, nempe $\frac{am}{m - 1 : \text{in } c}$, & ultimus terminus evanescet, sive m existat $<$ vel ꝏ ipsi b.

XXVII. *Si dati cujuslibet numeri radix quadrata ducatur in ipsum numerum, & producti radix quadrata denuo ducatur in eundem, & producti hujus radix iterum iterumque; idque fiat continuo in infinitum: erit radix producti ultimi æqualis ipsi dato numero:* (putà, si datus numerus vocetur a, erit $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}}$ &c. ꝏ a.)

Pooatur enim x ꝏ √: a √: a √: a √: a &c. erit xx ꝏ a √: a √: a √: a &c. & $\frac{xx}{a}$ ꝏ √: a √: √: a &c. ꝏ x: proinde xx ꝏ ax, & x ꝏ a. Q. E. D.

XXVIII. *Si dati numeri cujuslibet radix quadrata addatur ipsi dato numero, & aggregati radix quadrata denuo addatur eidem, & aggregati hujus radix iterum iterumque; idque fiat continuo in infinitum: radix aggregati ultimi radicem dati numeri quarta parte unitatis aucti dimidia unitate superabit.* (putà √: $a +$ √: $a +$ √: $a +$ √: $a +$ &c. ꝏ $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.)

Posito enim x ꝏ √: $a +$ √: $a +$ √: $a +$ &c. erit xx ꝏ $a +$ √: $a +$ √: $a +$ &c. & $xx - a$ ꝏ √: $a +$ √: $a +$ √: $a +$ &c. ꝏ x: proinde xx ꝏ $x + a$, & x ꝏ $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$. Q. E. D.

XXIX. *Datis duobus numeris quibusvis, si radix quadrata unius ducatur in alterum, & producti radix quadrata in primum, & hujus producti radix in alterum; atque ita semper productorum radices ducantur alternatim in datorum alterum; idque continuetur in infinitum: erit radix producti ultimi æqualis alterutri duorum mediorum proportionalium inter duos datos numeros* (putà si dati numeri dicantur a & b, erit √: a √: b √: a √: b √: a √: b. &c. ꝏ √C. aab.)

Esto namque $x \infty \sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, b \sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, b.$ &c. erit $xx \infty a \sqrt{:}\, b \sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, b$ &c. & $\frac{xx}{a} \infty \sqrt{:}\, b \sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, b.$ &c. & $\frac{x4}{aa} \infty b \sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, b.$ &c. & $\frac{x4}{aab} \infty \sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, b.$ &c. ∞x: proinde $x4 \infty aabx$, & $x3 \infty aab$, & $x \infty \sqrt{C.}\, aab.$ Q. E. D.

XXX. *Datis duobus numeris quibusvis, si radix cubica producti ex utroque ducatur in eorum primum, & producti radix quadrata ducatur in productum ex utroque, & hujus producti radix cubica denuo in eorum primum; & sic alternatim radices cubicæ & quadratæ ducantur in eorum primum & productum ex utroque, erit radix producti ultimi æqualis primo vel secundo quatuor mediorum proportionalium inter duos datos* (putà $\sqrt{:}\, a \sqrt{C:}\, ab \sqrt{:}\, a \sqrt{C:}\, ab$, &c. $\infty \sqrt{S.}\, a4b$, & $\sqrt{C:}\, ab \sqrt{:}\, a \sqrt{C:}\, ab \sqrt{:}\, a$ &c. $\infty \sqrt{S.}\, a3bb$.)

XXXI. *Datis duobus numeris quibusvis, si radix quadrata secundi ducatur in primum, & producti radix quadrata iterum in primum, producti vero hujus radix in secundum, & hujus producti radix denuò in primum, & sic alternatim productorum radices multiplicentur, bis in primum, semel in secundum, erit radix producti ultimi ∞ primo, secundo vel quarto sex proportionalium inter duos datos* (putà $\sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, b \sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, b$ &c. $\infty \sqrt{BS.}\, a6b$, & $\sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, b \sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, b \sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, a$ &c. $\infty \sqrt{BS.}\, a5bb$, & $\sqrt{:}\, b \sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, b \sqrt{:}\, a \sqrt{:}\, a$ &c. $\infty \sqrt{BS.}\, a3b4$.)

XXXII. *Datis duobus numeris quibusvis* p *&* q, *si tertius quicunque ductus in* q, *addatur ipsi* pp, *& ex radice summa subtrahatur* p, *& residui radix in* q *ducta addatur ipsi* pp, *& ex radice summa denuò subtrahatur* p, *& sic deinceps in infinitum, erit radix ultimi residui,* putà $\sqrt{:} - p + \sqrt{:}\, pp + q \sqrt{:} - p + \sqrt{:}\, pp + q \sqrt{:} - p +$ &c. *radix æquationis cubicæ* $x3 \infty - 2px + q$.

XXXIII. *Iisdem positis, quæ in præcedente, si subtractio ipsius* p *vertatur in additionem, erit radix aggregati ultimi,* putà $\sqrt{:} + p + \sqrt{:}\, pp + q \sqrt{:} + p + \sqrt{:}\, pp + q \sqrt{:}$ &c. *radix æquationis* $x3 \infty + 2px + q$.

XXXIV. *Datis duobus numeris* p *&* q, *si tertius in* q *ductus subtrahatur à* pp, *& radix reliqui ad* p *addatur dematurve, & summæ reliquique radix in* q *ducta subducatur à* pp, *& radix reliqui,* &c. *erunt radices summæ residuique ultimi,* putà $\sqrt{:}\, p \,8\, \sqrt{:}\, pp - q \sqrt{:}\, p \,8\, \sqrt{:}\, pp - q \sqrt{:}$ &c. *radices æquationis* $x3 \infty + 2px - q$.

XXXV.

XXXV. *Non secus datis tribus numeris* p, q, r, *erit* √: — p + √: p p + r + q √: — p + √: p p + r + q &c. *radix æquationis biquadraticæ* x 4 ∞ — 2 p x x + q x + r.

Omnes hæ Propp. ad eundem modum demonſtrantur, quo Propp. XXVII. XXVIII. & XXIX. quorſum itaque κοκκύζειν!

Schol. Patet hinc aditus ad inventionem 2. med. proport. & in genere radicum Problematum ſolidorum & hyperſolidorum per ſolas rectas lineas & circulos, quam præſtantiſſimi omnium ſeculorum Geometræ à bis mille retro annis anxiè ſed fruſtrà quæſivere. Hanc ego, quoad fieri potuit, per ſeriem conſtructionis in infinitum continuandæ, primus omnium exhibui in Actis Lipſ. menſ. Septemb. 1689. cum nemo ſimile quicquam ſcripto publicaſſet, fortè nec animo concepiſſet uſpiam.

De Uſu Serierum Infinitarum in Quadraturis Spatiorum & Rectificationibus Curvarum.

Poſtquam prima parte laboris noſtri defuncti ſumus, variarumque quoad fieri potuit, ſerierum ſummas exhibuimus, ſupereſt, ut ad alteram inſtituti partem tranſeamus, oſtendendo modum eas applicandi ad dimenſiones quantitatum Geometricarum, præſertim illarum, quas tranſcendentes *nuncupant, licet ſeriebus, quæ hic uſui venient, raro contingat eſſe ex numero earum, quas proximè contemplati ſumus, quarumque ſummas in poteſtate habemus. Obſervarunt enim Geometræ, plurimas dari quantitates, cujuſmodi ſunt pleræque Lineæ Curvæ, & pleraque ab iis comprehenſa ſpatia, quæ nullis numeris vel rationalibus vel ſurdis quantumvis compoſitis exprimi, h. e. quarum relationes ad alias datas ſub nulla æquatione algebraica definiti gradus cogi poſſent, ſed quæ omnes æquationum gradus quaſi tranſcenderent; ac idcirco attentandum duxerunt, num quas uno aliquo numero effari non poterant, per ſeriem ſaltem infinitorum, maximè rationalium, exprimere liceret, quibus ita continuò ad quæſitum accederetur, ut error tandem data quavis quantitate minor fieret, totaque ſeries exactum quæſiti valorem exhiberet. Inventum, quod, quantum conſtat, vergente demum hoc ſeculo à* Mercatore,

 Grego-

Gregorio, Newtono, Leibnitio, *in lucem productum fuit. Quid primi tres de his memoriæ prodiderint, etiamnum ignoramus. Summus Geometra Leibnitius, qui rem haud dubiè longissimè provexit, inter alias series, quas nobis in Actu Lips. impertivit, unam initio Actorum 1682. pro Circuli magnitudine dedit sed methodum, qua illuc pervenit, nusquam exposuit. Quantum conjicio, non differt illa à nostra; nam & in easdem cum ipso series incidimus & ipsius subinde calculo differentiali usi sumus, uti posthac patebit. Principia hujus calculi exponere nimis longum & alienum foret. Ea Vir perillustris D. Marchio* Hospitalius *in Libro de Analysi infinitè parvorum nuperrimè edito perspicuè tradit, ad quem proin Lectorem φιλομαθῆ remittimus.*

Definitio:

Mixtam Seriem voco, cujus termini multiplicatione sunt conflati ex terminis ejusdem ordinis aliarum serierum. Ita si sint series a, b, c, d, e, &c. & f, g, h, i, k, &c. mixta ex utraque erit af, bg, ch, di, ek, &c.

XXXVI.

Fractionem $\frac{l}{m-n}$ *convertere in seriem infinitam quantitatum geometricè proportionalium.*

Fit hoc per divisionem continuam numeratoris per denominatorem, hoc pacto: m in l habeo $\frac{l}{m}$, quod multiplicatum per divisorem $m-n$, & subtractum ex dividendo l relinquit $\frac{ln}{m}$; hoc rursus divisum per m facit $\frac{ln}{mm}$, quod ductum in $m-n$ & subtractum ex dividendi reliquo efficit residuum $\frac{lnn}{mm}$; hoc denuò divisum per m, facit $\frac{lnn}{m^3}$, quo ducto in $m-n$ & subtracto remanet $\frac{ln^3}{m^3}$, atque ita deinceps sine fine in infinitum: semper enim aliquid dividendum superest, cum unius membri dividendus à divisore bimembri nunquam sine residuo exhauriri possit. At hoc residuum, continuata operatione positoque $m > n$, perpetuo decrescit, & tandem data quavis quantitate minus fit, ut patet. Est ergo fractio proposita

$\frac{l}{m-n}$

$\frac{l}{m-n} \infty \frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5}$ &c. quæ ſeries eſt quantitatum geometricè progredientium in ratione m ad n; quandoquidem quilibet ejus terminus ex conſtructione in n ductus & per m diviſus proximè ſequentem exhibet.

Idem brevius ſic evincitur: Summa Progreſſionis Geometricæ $\frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5}$ &c. eſt $\frac{l}{m-n}$, per Corollar. VIII. Ergo reciprocè valorem fractionis $\frac{l}{m-n}$ per talem ſeriem exprimere licet.

XXXVII. *Fractionem* $\frac{1}{m+n}$ *reſolvere in ſeriem infinitam geometricè proportionalium.*

Facta diviſione continua numeratoris per denominatorem, eadem reſultat ſeries, quæ anteà, niſi quod termini ejus alternatim fiant poſitivi & negativi. Eſt igitur quantitas $\frac{l}{m+n} \infty \frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5}$ &c. ſaltem ſi ponatur $m > n$: tum enim quod poſt ſingulas diviſiones reliquum manet, continuo minuitur, donec continuata in infinitum operatione prorſus evaneſcat.

Idem quoque ſic eluceſcit: Quoniam in ſerie quantitatum $\frac{l}{m}, \frac{ln}{mm}, \frac{lnn}{m^3}, \frac{ln^3}{m^4}, \frac{ln^4}{m^5}$ &c. ex hyp. primus terminus eſt ad ſecundum, ut tertius ad quartum, & quintus ad ſextum &c. nec non ſecundus ad tertium, ut quartus ad quintum, & ſextus ad ſeptimum &c. erit etiam ex æquo, primus ad tertium, ut tertius ad quintum, & quintus ad ſeptimum &c. quod docet, primum, tertium, quintum, ſeptimum &c. terminos exemptis reliquis etiam geometricè proportionales eſſe, quorum adeo ſumma per Corollar. VIII. invenitur $\frac{lm}{mm-nn}$. Eodem pacto oſtenditur, ſecundum, quartum, ſextum &c. terminos ſeriem geometricè proportionalium efficere, cujus ſumma $\frac{ln}{mm-nn}$. Igitur differentia harum

duarum serierum, seu $\frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5}$ &c. ∞ $\frac{lm - ln}{mm - nn} \infty \frac{l}{m+n}$, ac propterea quantitas $\frac{l}{m+n}$ in istam seriem vicissim converti potest.

Coroll. 1. In omni Progressione Geometrica descendente (primo termino existente determinato, signisque $+$ & $-$ alternatim se excipientibus) summa seriei limites habet, quos nequit attingere, nedum egredi, qualiscunque statuatur ratio progressionis. Cum enim per hyp. $n > 0$, & $< m$, erit $\frac{l}{m+n} < \frac{l}{m+0} = \frac{l}{m}$; & $> \frac{l}{m+m} = \frac{l}{2m}$, hoc est, valor seriei perpetuo minor est ipso primo termino, & major ejus semisse.

Coroll. 2. Si tamen $m \infty n$, fiet $\frac{l}{m+n} \infty \frac{l}{2m}$, & series $\frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4}$ &c. ∞ $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. unde paradoxum fluit non inelegans, quod $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. ∞ $\frac{l}{2m}$. Etenim si ultimus seriei terminus signo $-$ affectus concipiatur, termini omnes se mutuò destruere apparebunt, & si signo $+$, æquari videbuntur ipsi $\frac{l}{m}$, non $\frac{l}{2m}$. Ratio autem paradoxi est, quod continuata divisione ipsius l per $m+m$, residuum divisionis non minuitur, sed perpetuo ipsi l æquale manet; unde quotiens divisionis propriè non est sola series $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. sed $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. $+$ vel $- \frac{l}{2m}$, faciendo scil. fractionem ex residuo & divisore, illamque signo $+$ vel $-$ afficiendo, prout ultimus seriei terminus vicissim $-$ vel $+$ habere fingitur.

XXXVIII. *Fractionem* $\frac{1}{\Box : m - n}$ *transmutare in seriem infinitam.*

Quoniam quantitas $\frac{l}{m-n} \infty \frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4}$ &c. per XXXVI. facta utrinque multiplicatione per $\frac{1}{m-n}$, habebitur $\frac{l}{\Box : m - n} \infty$

seriei

feriei A, cujus termini finguli de novo in totidem alias feries B, C, D, E, F, &c. per eandem XXXVI. Prop. convertantur. Quo facto ferierum iftarum termini homologi in unam fummam

$$\frac{l}{\square : m-n} \infty \text{A} \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{l}{mm-mn} \infty \frac{l}{mm} + \frac{ln}{m^3} + \frac{lnn}{m^4} + \frac{ln^3}{m^5} + \frac{ln^4}{m^6} & \&c. & \infty \text{B} \\ \frac{ln}{m^3-mmn} \infty \; . \; + \frac{ln}{m^3} + \frac{lnn}{m^4} + \frac{ln^3}{m^5} + \frac{ln^4}{m^6} & \&c. & \infty \text{C} \\ \frac{lnn}{m^4-m^3n} \infty \; . \; . \; + \frac{lnn}{m^4} + \frac{ln^3}{m^5} + \frac{ln^4}{m^6} & \&c. & \infty \text{D} \\ \frac{ln^3}{m^5-m^4n} \infty \; . \; . \; . \; . \; + \frac{ln^3}{m^5} + \frac{ln^4}{m^6} & \&c. & \infty \text{E} \\ \frac{ln^4}{m^6-m^5n} \infty \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; + \frac{ln^4}{m^6} & \&c. & \infty \text{F} \\ \&c. \; \infty \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & \&c. & \infty \; \&c. \end{array} \right.$$

$$\text{Z} \; \infty \; \frac{l}{mm} + \frac{2ln}{m^3} + \frac{3lnn}{m^4} + \frac{4ln^3}{m^5} + \frac{5ln^4}{m^6} \; \&c. \; \infty \; \frac{l}{\square : m-n}$$

conflati novam feriem Z conftituent, æqualem propterea quantitati propofitæ $\frac{l}{\square . m-n}$, mixtamque ex ferie numerorum naturalium 1. 2. 3. 4. &c. & quantitatum geometricé progreffionalium $\frac{l}{mm}$, $\frac{ln}{m^3}$, $\frac{lnn}{m^4}$, $\frac{ln^3}{m^5}$ &c.

Eadem feries Z elici quoque poteft divifione continua numeratoris l per denominatorem $mm - 2mn + nn$, dicendo: mm in l, habeo $\frac{l}{mm}$, quod ductum in diviforem & fubtractum ex dividendo relinquit $+ \frac{2ln}{m} - \frac{lnn}{mm}$; tum porrò mm in $+ \frac{2ln}{m}$, reperio $+ \frac{2ln}{m^3}$, quod multiplicatum & fubtractum, ut decet, refiduum efficit $+ \frac{3lnn}{mm} - \frac{2ln^3}{m^3}$, atque ita ulterius pergendo in infinitum: quo pacto obfervabitur, poft fingulas operationes duo membra reliqua manere, fed illa ufque & ufque minora, tandemque data quavis quantitate propius ad nihilum vergentia.

Idem etiam oftenditur ex lege reciprocorum, refolvendo feriem Z methodo Prop. XIV. in infinitas feries geometricas B, C, D, E, F &c. harum enim fummæ cum novam progreffionem A conftituant,

tuant, quæ ipſa ſummam efficit $\frac{l}{mm - 2mn + nn}$, ſequitur reciprocè, & hanc quantitatem $\frac{l}{\square : m - n}$ per ſeriem Z legitimè efferri poſſe.

XXXIX. *Fractionem* $\frac{1}{\square : m + n}$ *convertere in ſeriem.*

Si operatio inſtituatur methodo Propoſ. præced. eadem, quæ ibi, obtinebitur ſeries, niſi quod termini locorum parium acquirant ſignum —, ſic ut habeatur: $\frac{l}{\square : m + n} \infty \frac{l}{mm} - \frac{2ln}{m3} + \frac{3lnn}{m4} - \frac{4ln3}{m5} + \frac{5ln4}{m6} - \frac{6ln5}{m7}$ &c.

XL. *Fractionem* $\frac{1}{C : m - n}$, *aut* $\frac{1}{C : m + n}$, *exprimere per ſeriem.*

Ex analogia operationum præcedentium liquet modus hoc efficiendi; quorſum igitur plura? En operationem:

$\frac{l}{\square : m - n} \infty \frac{l}{mm} + \frac{2ln}{m3} + \frac{3lnn}{m4} + \frac{4ln3}{m5} + \frac{5ln4}{m6}$ &c. per XXXVIII, factaque hinc inde multiplicatione per $\frac{1}{m - n}$,

$$\frac{l}{C : m - n} \infty \left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{m3 - mmn} \infty \frac{l}{m3} + \frac{ln}{m4} + \frac{lnn}{m5} + \frac{ln3}{m6} + \frac{ln4}{m7} \text{ \&c.} \\ \frac{2ln}{m4 - m3n} \infty \; . \; + \frac{2ln}{m4} + \frac{2lnn}{m5} + \frac{2ln3}{m6} + \frac{2ln4}{m6} \text{ \&c.} \\ \frac{3lnn}{m5 - m4n} \infty \; . \; . \; + \frac{3lnn}{m5} + \frac{3ln3}{m6} + \frac{3ln4}{m7} \text{ \&c.} \\ \frac{4ln3}{m6 - m5n} \infty \; . \; . \; . \; . \; + \frac{4ln3}{m6} + \frac{4ln4}{m7} \text{ \&c.} \\ \text{\&c.} \quad \infty \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{\&c.} \end{array} \right\} \text{per Prop. XXXVI.}$$

$$\frac{l}{m3} + \frac{3ln}{m4} + \frac{6lnn}{m5} + \frac{10ln3}{m6} + \frac{15ln4}{m7} \text{ \&c.} \infty \frac{l}{C : m - n}.$$

Eodem pacto habetur $\frac{l}{C : m + n} \infty \frac{l}{m3} - \frac{3ln}{m4} + \frac{6lnn}{m5} - \frac{10ln3}{m6} + \frac{15ln4}{m7}$ &c.

Conflantur autem termini harum ſerierum ex ductu terminorum progreſſionis geometricæ in numeros trigonales 1. 3. 6. 10. 15. &c.

Si quis idem per diviſionem continuam conſequi deſideret, is obſer-

obſervabit, poſt ſingulas operationes tria ſupereſſe membra, ſed ea ſubinde minora, ultimoque prorſus evaneſcentia.

Idem etiam regrediendo à ſerie inventâ patebit, ſi illa methodo Prop. XIV. in alias reſolvatur, &c.

Schol. Haud diſſimili operatione reperitur $\frac{l}{QQ:m8n} \infty \frac{l}{m4} 8 \frac{4ln}{m5} + \frac{10lnn}{m6} 8 \frac{20ln^3}{m7}$ &c. ut & $\frac{l}{SS:m8n} \infty \frac{l}{m5} 8 \frac{5ln}{m6} + \frac{15lnn}{m7} 8 \frac{35ln^3}{m8}$ &c. ſeriebus mixtis ex geometrica & ſerie pyramidalium, trianguli-pyramidalium, & ita conſequenter in omnibus altioribus, ſervatâ ſemper eadem analogiæ ratione, ut non opus ſit his diutius immorari.

XLI. *Si proponatur ſeries differentialium, quæ mixta ſit ex ſerie geometrica quantitatum indeterminatarum, & alia quavis ſerie quantitatum conſtantium ſeu coëfficientium, integralia eorum abſoluta ſeriem conſtituent mixtam ex eadem ſerie coëfficientium, ſimili geometrica indeterminatarum, & alia quadam harmonica.*

Patet ex princ. calc. diff. vel ſummatorii, juxta quæ quantitatis differentialis $nx^m dx$ integrale abſolutum reperitur $\frac{n.x^{m+1}}{m+1}$; hinc enim ſi coëfficientes n ſint progreſſionis cujusvis, & exponentes m progreſſionis arithmeticæ, h. e. ipſa x^m progr. geometricæ, erunt quoque $m+1$ arithm. adeoque x^{m+1} geometr. & $\frac{1}{m+1}$ harmonicæ progreſſionis. Ut ſi proponatur ſeries differentialium $axdx$, bx^3dx, cx^5dx, fx^7dx &c. mixta ex ſerie quavis a, b, c, f &c. & geometrica xdx, x^3dx, x^5dx, x^7dx &c. erunt eorum integralia $\frac{axx}{2}$, $\frac{bx4}{4}$, $\frac{cx6}{6}$, $\frac{fx8}{8}$ &c. mixta ex eadem ſerie a, b, c, f &c. geometrica ſimili xx, $x4$, $x6$, $x8$ &c. & harmonica $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ &c.

XLII. *Exhibere aream Hyperbolæ inter Aſymptotas per ſeriem infinitam.* Fig. 1.

Mod. 1. *Per Arithm. Infin. Wall.* Eſto Hyperbola PCQ, cujus centrum A, aſymptotæ AD, AS, applicatæ BC, IO (..), quærendumque ſit ſpatium CBIO (CB..). Sumto autem AB ∞ 1 ∞

BD, BC ∞ *b*, BI (Bι) ∞ *x*, quæ non fit > AB vel BD, h. e. unitate. Dividatur BI (Bι) in partes aliquot æquales BE, EF, FG, GR, RI (Bε, εφ, φγ, γϱ, ϱι) quarum numerus fit *n*, & fingulæ dicantur *d*, fic ut *nd* fit ∞ *x* ∞ BI (Bι). Tum circumfcribantur (infcribantur) hyperbolæ parallelogramma BK, EL, FM, GN, RO (Bκ, ελ, φμ, γν, ϱο) ductis applicatis EK, FL, GM, RN, IO (εκ, φλ, γμ, ϱν, ιο) quæ ex natura hyperb. ordine reperiuntur $\infty\ \frac{b}{1-d}, \frac{b}{1-2d}, \frac{b}{1-3d}, \frac{b}{1-4d}$ &c. ufque ad ultimam $\frac{b}{1-nd}$. Singulis igitur in *d* ductis, habentur areæ parallelogrammorum, quæ porro in feries convertendæ funt per XXXVI. & XXXVII, ut fequitur:

$$\text{BK (B}\kappa) \infty \frac{bd}{1-d} \infty bd - bdd + bd^3 - bd^4 + bd^5 - bd^6 \text{ \&c.}$$

$$\text{EL (}\varepsilon\lambda) \infty \frac{bd}{1-2d} \infty bd - 2bdd + 4bd^3 - 8bd^4 + 16bd^5 - 32bd^6 \text{ \&c.}$$

$$\text{FM (}\varphi\mu) \infty \frac{bd}{1-3d} \infty bd - 3bdd + 9bd^3 - 27bd^4 + 81bd^5 - 243bd^6 \text{ \&c.}$$

$$\text{GN (}\gamma\nu) \infty \frac{bd}{1-4d} \infty bd - 4bdd + 16bd^3 - 64bd^4 + 256bd^5 - 1024bd^6 \text{ \&c.}$$

$$\text{Ult. RO (}\varrho o) \infty \frac{bd}{1-nd} \infty bd - nbdd + nnbd^3 - n^3bd^4 + n^4bd^5 - n^5bd^6 \text{ \&c.}$$

Harum ferierum primi termini æquantur, fecundi progrediuntur ut numeri naturales, tertii ut eorundem quadrata, quarti ut cubi, &c. hinc pofito numero ferierum feu parallelogrammorum *n* infinito (quo quidem cafu fumma parall-orum feu infcript. feu circumfcriptorum ab ipfo curvilineo CBIO vel CBιο non differt) fumma terminorum primæ feriei perpendicularis erit æqualis, terminorum fecundæ dimidia, tertiæ fubtripla &c. fummæ totidem, hoc eft, *n* terminorum ultimo æqualium, per ea, quæ docet Wallifius in Arithm. Infinit. nosque demonftrabimus alibi: ac proptereà fumma omnium ferierum perpendicularium, i. e. omnium parallelogrammorum, feu area fpatii hyperbolici CBIO (CBιο) hac ferie exprimetur:

$$\frac{nbd}{1} - \frac{nnbdd}{2} + \frac{n^3bd^3}{3} - \frac{n^4bd^4}{4} + \frac{n^5bd^5}{5} - \frac{n^6bd^6}{6} \text{ \&c.}$$

five, loco *nd* fubftituendo *x*,

fix

$\frac{bx}{1} \; 8 \; \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} \; 8 \; \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5} \; 8 \; \frac{bx^6}{6}$ &c.

Mod. 2. *Per Calc. diff. Leibn.* Positis, ut prius, AB ꝏ 1 ꝏ BD, BC ꝏ b, & BI (B‘) ꝏ x, ejusque elemento RI (ϛ‘) ꝏ dx, erit ex natura hyperbolæ IO (‘‘) ꝏ $\frac{b}{1 \, 8 \, x}$, & elementum spatii hyperbolici RO (ϛ‘) ꝏ $\frac{bdx}{1 \, 8 \, x}$ ꝏ seriei geometricæ $bdx \; 8 \; bxdx + bxxdx \; 8 \; bx^3dx + bx^4dx$ &c. per XXXVI. & XXXVII; adeoque summa elementorum S$\frac{bdx}{1 \, 8 \, x}$, sive spatium CBIO (CB‘‘) ꝏ $bx \; 8 \; \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} \; 8 \; \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5}$ &c. eadem series, quæ suprà, mixta sc. ex geometrica & harmonica, per præced. Hæc igitur si summari posset, daretur Hyperbolæ quadratura.

Coroll. 1. Si BI ꝏ B‘, dabitur tum summa tum differentia spatiorum CBIO & CB‘‘ per seriem ex geom. & harm. mixtam: cum enim sit ostensum

$$\left.\begin{array}{l} \text{CBIO} ꝏ bx + \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} + \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5} + \frac{bx^6}{6} \text{ \&c.} \\ \text{CB‘‘} ꝏ bx - \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} - \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5} - \frac{bx^6}{6} \text{ \&c.} \end{array}\right| \text{fiet facta serierum additione \& subtractione,}$$

$$\text{CBIO} + \text{CB‘‘} ꝏ \frac{2bx}{1} + \frac{2bx^3}{3} + \frac{2bx^5}{5} \text{ \&c.}$$

$$\text{CBIO} - \text{CB‘‘} ꝏ \frac{2bxx}{2} + \frac{2bx^4}{4} + \frac{2bx^6}{6} \text{ \&c.}$$

Coroll. 2. Posita BI, x ꝏ BA, 1, fit spatium interminatum hyperbolicum PCBAS ꝏ $\frac{b}{1} + \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \frac{b}{5} + \frac{b}{6}$ &c. simplici seriei harmonicæ, quæ cum infinita sit per XVI, arguit & aream hujus spatii talem esse. Conf. Cor. 4. ejusd. Prop.

Cor. 3. Sin & B‘, x, ꝏ BD, 1 ꝏ BC, b, resultat pro spatio CBDQ series harmonica $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ &c. hoc est, subducendo unumquemque terminum signo — affectum à præcedenti, series $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56}$ &c. cujus termini per saltum excerpti sunt ex serie reciproca trigonalium Q Prop. XV, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ &c.

Quòd ſi ſtatuatur □ AB, BC vel BD quadruplo minus, np. $\frac{1}{4}$, exhibebitur etiam ſpatium CBDQ per ſeriem prioris ſubquadruplam $\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{120}$ &c. quæ per ſaltum formatur ex ſerie I Propoſ. XVII. Conf. Act. Lipſ. 1682. p. 46.

XLIII. *Invenire aream ſpatii ABEFS (BDφ) comprehenſi aſymptota hyperbolæ AD, & Curva BEF (ιφ), quæ talis, ut ▭ ſub ejus applicata IE (ιι) & recta conſtante AB, BC vel BD (quæ ſit 1) æquetur ſpatio hyperbolico CBIO (CBιο).* Fig. 2.

Quoniam, poſita BI ꝏ x, ſpatium hyperbolicum CBIO ꝏ $x + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ &c. per præced. eadem quoque ſeries denotabit (ob AB vel BC ꝏ 1) longitudinem applicatæ IE, quæ propterea ducta in IR ſeu dx producit $x\,dx + \frac{xx\,dx}{2} + \frac{x^3 dx}{3} + \frac{x^4 dx}{4} + \frac{x^5 dx}{5}$ &c. ꝏ RE, elem. ſpatii BIE. Hujus ſeriei terminos ſummando fit ſpatium BIE ꝏ $\frac{xx}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^6}{30}$ &c. ſeriei mixtæ ex geometrica & reciproca trigonalium, quæ poſito inſuper BI, x ꝏ BA, 1, mutatur in ſimplicem trigonalium reciprocam $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ &c. cujus ſumma ꝏ 1; per XV. Eſt igitur totum ſpatium ABEFS abſolutè quadrabile, æquale quippe □to AB. Nota hìc exemplum Curvæ mechanicæ, ubi quadratura ſpecialis ſuccedit abſque generali; ſimplicis enim ſeriei ſummam dedimus, mixtæ non item.

Eadem ratione oſtendetur ex altero latere ſpatium Bιι ꝏ $\frac{xx}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{20}$ &c. totumque ſpatium BDφ ꝏ $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20}$ &c.

Coroll Completis rectangulis CD & BQ, ajo fore curvilineum mechanicum BDφ ꝏ duplo curvilineo hyperbolico CQL, differentiam curvilineorum ABEFS & BDφ ꝏ duplo ſpatio CQH, & ſummam eorundem ꝏ 2 CBDQ; quæ ſic palàm fiunt: Si à ſerie $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ &c. ſubducatur $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{7}$ &c. auferendo ſigillatim primum terminum à primo, ſecundum à ſecundo, tertium à tertio, &c. relinquetur $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} -$

$\frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{42}$ &c. ∞ ſpatio BDφ, ut oſtenſum. Si vero eadem ſeries ex altera ſic tollatur, ut primus ejus terminus dematur ex ſecundo alterius, ſecundus ex tertio, tertius ex quarto &c. orietur $\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6}$ &c. ∞ $\frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4}$ &c. $- 1 \infty$ (per præced.) duplo ſpat. hyperb. CBDQ — BH ∞ 2 CBDQ — 2 DL ∞ 2 CLQ. Ergo BDφ ∞ 2 CLQ. Igitur cum oſtenſum etiam ſit ABEFS ∞ 1 ∞ BH ∞ 2 DL ∞ 2 LH, erit ABEFS — BDφ ∞ 2 LH — 2 CLQ ∞ 2 CQH; nec non ABEFS + BDφ ∞ 2 DL + 2 CLQ ∞ 2 CBDQ. Quæ erant demonſtr.

XLIV. *Invenire aream ſpatii ABKGMT (BDNγK) comprehenſi aſymptota hyperbolæ AD, & Curva KGM (KγN), quæ talis, ut* ▭ *BIG (B$\iota\gamma$) ſub ejus applicata IG ($\iota\gamma$) & indeterminata BI (Bι), æquetur ſpatio hyperbolico CBIO (CBιo).* Fig. 2.

Quia poſitis omnibus, ut prius, ſpatium hyperb. CBIO $\infty\, x + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ &c. per XLII, erit per hyp. facta diviſione per BI ſeu x, recta IG $\infty\, 1 + \frac{x}{2} + \frac{xx}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5}$ &c. adeoque RG elem. ſpat. BIGK $\infty\, dx + \frac{xdx}{2} + \frac{xxdx}{3} + \frac{x^3dx}{4}$ &c. omniaq; RG ſeu ſpatium BIGK $\infty\, \frac{x}{1} + \frac{xx}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{25}$ &c. & poſita $x \infty 1$, ſpatium totale ABKGMT $\infty\, \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ &c. ſeriei reciprocæ quadratorum, cujus ſummam etiamnum deſideramus. Conf. Prop. XVII. ſub fin.

Haud diſſimili modo reperitur ex altera parte ſpatium B$\iota\gamma$K $\infty\, \frac{x}{1} - \frac{xx}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{25}$ &c. ſumtaque $x \infty 1$, totale ſpatium BDNγK & $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ &c.

Coroll. Spatium ABKGMT duplum eſt ſpatii BDNγK; cum enim ſumma utriusque ſit $\frac{2}{1} + \frac{2}{9} + \frac{2}{25}$ &c. & differentia $\frac{2}{4} + \frac{2}{16} + \frac{2}{36}$ &c. erit utique ſumma ad differentiam, ut $\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}$ &c. ad $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36}$ &c. h. e. ut 3 ad 1, per XXIV; unde ſpatium unum alterius duplum eſſe neceſſe eſt, ut maximè neutrius abſolutam magnitudinem exploratam habeamus. Vid. Schol. ibid.

XLV. *Exhibere Quadraturam Circuli aut Rectificationem Lineæ Circularis per seriem.* Fig. 3.

In peripheria semicirculi BCD, sumto indefinitè puncto H, demittatur ex illo in radium AB perpendicularis HE; & sit AB ∞ 1, & BE ∞ x, adeoque ex nat. circ. EH ∞ $\sqrt{2x-xx}$: quo posito, cum ob simil. Triangul. characteristici LGH & Triangul. HEA, HE sit ad HA, sicut LG vel EF elem. abscissæ BE, ad LH elem. arcus circ. BH, reperitur LH ∞ $\frac{dx}{\sqrt{2x-xx}}$, factaque multiplicatione per $\frac{1}{2}$, semissem radii AH, sector HAL seu elem. sectoris HAB ∞ $\frac{dx}{2\sqrt{2x-xx}}$. Hæc igitur quantitas, cum absolutè summari nequeat, in seriem convertenda est, sed prius tollenda irrationalitas, quod eo ferè modo fit, quo in Problematis Diophanteis uti vulgo sueverunt. In hunc finem pono $\sqrt{2x-xx}$ ∞ $\frac{x}{t}$, seu $2x-xx$ ∞ $\frac{xx}{tt}$, ubi quia divisio fieri potest per x, ipsaque non nisi unius dimensionis in æquatione relinquitur, ejus valor in rationalibus prodibit, unde & dx, & per hypoth. $\sqrt{2x-xx}$ seu $\frac{x}{t}$, ipsaque adeo fractio $\frac{dx}{2\sqrt{2x-xx}}$, rationales fient; nempe $x \infty \frac{2tt}{1+tt}$, $dx \infty \frac{4tdt}{\Box:1+tt}$, $\sqrt{2x-xx} \infty \frac{x}{t} \infty \frac{2t}{1+tt}$, & deniq; $\frac{dx}{2\sqrt{2x-xx}}$ ∞ $\frac{dt}{1+tt}$; hinc fractio in seriem geometricam per XXXVII conversa exhibet $dt - ttdt + t^4dt - t^6dt + t^8dt$ &c. Summa igitur elementorum HAL, seu totus sector HAB ∞ $t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9}$ &c. eoque per semissem radii $\frac{1}{2}$ diviso, arcus BH ∞ $\frac{2t}{1} - \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{2t^9}{9} - \frac{2t^{11}}{11}$ &c. quæ series mixtæ sunt ex geometrica & harmonica, per XLI, à quarum proin summatione decantatum illud de Circuli Tetragonismo Problema dependet. Nota, ductis ex B & H tangentibus circuli BI, HI, sibi mutuo occurrentibus in I, junctaque HD, quæ radium AC secet in K, fore BI vel IH ∞ AK, utramlibet autem ∞ t. Nam 2. ang. BAI ∞ BAH ∞ AHD + ADH ∞ 2 ADH. Ergo BAI ∞ ADH;

A D H; cumque & A B I & D A K anguli, nec non latera A B & A D æquentur, erit quoque B I ∞ A K. Deinde cum sit per hypoth. 1 ad t, ut $\sqrt{2x - xx}$ ad x; itemque, ob sim. △ D A K & D E H, A D seu 1 ad A K, sicut D E ad E H, hoc est, ex nat. circul. H E ad E B, seu $\sqrt{2x - xx}$ ad x; erit utique 1. t :: 1. A K, ac proinde A K seu B I ∞ t.

Coroll. 1. Sumta $t \infty 1$, quo casu & B E, x seu $\frac{2tt}{1+tt}$, æquatur B A, 1, fiet quadrans B A C ∞ simplici seriei harmonicæ $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. ∞ (subducto reapse unoquoque termino signo — affecto à præcedente) $\frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99}$ &c. Hinc quia quadratum radii est ad quadrantem circuli, sicut quadratum diametri ad totum circulum, sequitur si quadratum diametri, h. e. quadratum circulo circumscriptum sit 1, ac proin eidem inscriptum $\frac{1}{2}$, totius circuli aream per modo memoratam seriem expressum iri; adeoque si quadratum circulo inscriptum sit $\frac{1}{4}$, circuli aream fore $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ &c. cujus seriei termini per saltum excerpti sunt ex serie H Prop. XVII. Conf. Act. Lipsf. 1682. p. 45.

Coroll. 2. Posita Tangente B I ∞ t, erit arcus, cujus tangens est, $\infty \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$ &c. utpote semissis arcus B H. Confer Act. Lipsf. 1691. pag. 179.

XLVI. *Exhibere generaliter Sectorem cujusvis Sectionis Conicæ ex centro per seriem.* Fig. 4. & 5.

Esto Coni Sectio quæcunque, Hyperbola sive Ellipsis, B C D, cujus centrum A, vertex B, semi-latus transversum A B ∞ a, semi-axis conjugatus A L ∞ 1, adeoque semi-latus rectum $\infty \frac{1}{a}$, & ratio laterum, ut aa ad 1. Ponanturque porrò, abscissa indeterminata B G ∞ x, A G ∞ z ∞ $a \between x$ ($\between$ significat + in Hyperbol. & — in Ellipsf. uti $\between$ vicissim — in Hyp. & + in Ell.) ejusque elementum F G vel C H ∞ dx ∞ $\between dz$, ordinata G D ∞ y, ejus elementum D H ∞ dy, & jungens D cum centro recta A D ∞ u ∞ $\sqrt{zz + yy}$. Ducta etiam intelligatur H C I parallela axi, secansque

que curvam in C & rectam A D in I, atque ex C demissa concipiatur in A D perpendicularis C E. Quibus positis, erit primo ex nat. Curv. $aa. 1 :: \pm zz \pm aa\ (2ax \pm xx).\ yy$; unde fit $aayy \infty \pm zz \pm aa\ (2ax \pm xx)$, & differentiando $aaydy \infty \pm zdz$, & denique $dy \infty \frac{\pm zdz}{aay} \infty \frac{zdx}{aay}$. Deinde quoniam, ob sim. $\triangle$ DGA & DHI, DG, y est ad GA, z, sicut DH, dy, ad HI, invenitur HI $\infty \frac{zdy}{y}$, ac proinde CI (HI $\pm$ HC) $\infty \frac{zdy}{y} - dz \infty \frac{zdy - ydz}{y}$. Quare denuò propter $\triangle$ sim. AGD & IEC, ut AD, u, ad DG, y, sic IC, $\frac{zdy - ydz}{y}$, ad CE; unde reperitur CE $\infty \frac{zdy - ydz}{u}$, quæ ducta in semissem AD, seu $\frac{1}{2}u$, dat aream trianguli elementaris ACD $\infty \frac{zdy - ydz}{2} \infty$ (posito loco dy valore ejus) $\frac{\pm zzdz}{2aay} - \frac{ydz}{2} \infty \frac{\pm zzdz - aayydz}{2aay} \infty$ (substituendo $\pm zz \pm aa$ loco $aayy$) $\frac{\pm zzdz \pm zzdz \pm aadz}{2aay} \infty \frac{\pm adz}{2ay} \infty \frac{adx}{2ay} \infty$ (loco ay surrogando $\sqrt{2ax \pm xx}$) $\frac{adx}{2\sqrt{2ax \pm xx}}$, de qua in seriem convertenda & summanda agitur. Primò autem irrationalitas ex illa tollenda, mediante alia indeterminata, quæ loco x surrogari debet, ut in præc. Pono itaque $\sqrt{2ax \pm xx} \infty \frac{x}{t}$, unde fluit $x \infty \frac{2att}{1 \pm tt}$, & $dx \infty \frac{4atdt}{\square : 1 \pm tt}$, & $\sqrt{2ax \pm xx} \infty \frac{x}{t} \infty \frac{2at}{1 \pm tt}$, & denique $\frac{adx}{2\sqrt{2ax \pm xx}} \infty \frac{adt}{1 \pm tt} \infty$ seriei geom. $adt \pm attdt + at^4dt \pm at^6dt + at^8dt$ &c. per XXXVI & XXXVII. Summa igitur omnium sectorum elementarium ACD, i. e. area totius Sectoris ABCD $\infty at \pm \frac{at^3}{3} + \frac{at^5}{5} \pm \frac{at^7}{7} + \frac{at^9}{9}$ &c. $\square$ scil. comprehenso sub a semi-latere transverso & recta, cujus longitudo est $t \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9}$ &c. Unde patet, quo pacto generaliter quadraturæ sectionum Conicarum ad summas serierum ex geomet. & harmon. mixtarum reducantur.

Nota,

Notâ, ductis per verticem B & punctum Curvæ D tangentibus BM, DT, sibi mutuo occurrentibus in M, dico fore BM ∞ *t*. Quoniam enim AG. AB :: AB. AT, per 37. lib. 1. Apoll. ac idcircò convertendo AB. TB :: AG, *z*. GB, *x*; nec non (ob sim. △ TBM & CHD) TB. BM :: CH, *dx*. HD, *dy* :: (ex æquat. Curvæ different.) *aay*. *z*; erit ex æquo perturbatè AB, *a*. BM :: *aay*. *x*; unde obtinetur BM ∞ $\frac{x}{ay}$ ∞ $\frac{x}{\sqrt{2ax - xx}}$; adeoque $\sqrt{2ax - xx}$. *x* :: 1. BM: verum per constructionem $\sqrt{2ax - xx}$. *x* :: 1. *t*. Ergò omnino BM ∞ *t*. Conf. Act. Lipf. 1691. p. 179.

XLVII. *Dato Numero invenire Logarithmum per seriem.* Fig. 6.

Intelligatur super axe SA*σ* Curva quædam CB*x*, ejus naturæ, ut abscissæ AR, AS (A*ε*, A*σ*) crescant arithmeticè, dum applicatæ RE, SC (*ει*, *σx*) crescunt vel decrescunt geometricè, h. e. ut istæ sint ut Numeri, dum illæ sunt ut Logarithmi. Vocabitur hæc Curva *Logarithmica*, cujus hæc est proprietas, ostendente Acut. Leibnitio in Act. Lipf. 1684. p. 473. ut Subtangentes ejus omnes AK, RN, *εν* sint æquales. Applicetur in A recta AB, & sumto quovis in curva puncto E (*ι*) ducatur recta EI (*ιι*) parallela axi SA; vocceturque AB 1, BI (B*ι*) *x*; adeoque AI (A*ι*) seu RE (*ει*) 1 − *x*; nec non AR (A*ε*) *y*, & constans curvæ subtangens *b*. Dato itaque numero RE (*ει*) ejus Logarithmus AR (A*ε*) sic invenitur. Quoniam ex nat. gen. curvarum, elementum applicatæ EF (*ιφ*) *dx*, est ad elementum abscissæ FG (*φγ*) *dy*, sicut applicata RE (*ει*) 1 − *x*, ad curvæ subtaugentem RN (*εν*) *b*, habebitur $dy ∞ \frac{bdx}{1-x}$ ∞ fractione in seriem resoluta per XXXVI & XXXVII) $bdx - bxdx + bxxdx - bx^3dx + bx^4dx - bx^5dx$ &c. ideoque facta summatione, *y*, hoc est, AR (A*ε*) ∞ $bx - \frac{bxx}{2} + \frac{bx3}{3} - \frac{bx4}{4} + \frac{bx5}{5} - \frac{bx6}{6}$ &c. quæ insuper in casu speciali BI (B*ι*) ∞ BA ∞ BD, seu *x* ∞ 1, fit $b - \frac{b}{2} + \frac{b}{3} - \frac{b}{4} + \frac{b}{5} - \frac{b}{6}$ &c.

Coroll. 1. Identitas hujus seriei cum illa, quam supra Prop. XLII. pro spatio Hyperbolico quadrando reperiimus, de mutua dependentia & affinitate inter Hyperbolam & Logarithmos nos admonet, perspicuumque facit, quod sumtis in utraque Fig. 1. & 6. ipsis BI (Bι) æqualibus spatium hyperbolicum CBIO (CBικ) æquetur ▭lo sub unitate AB & Logarithmo AR (Aε). Unde porrò infertur, quòd sumtis utrobique AB, Aι, AD, hoc est, AB, ει, ρκ continuè proportionalibus, quo casu ex natura Logarithmicæ Aρ dupla fiet ipsius Aε, spatium hyperbolicum CBDQ duplum quoque sit ipsius CBικ, indeque CBικ, ικDQ spatia futura sint æqualia.

Coroll. 2. Quoniam evidens est, existente BI ∞ AB, h. e. evanescente AI seu RE, Logarithmum AR reddi infinitum, sequitur & seriem harmonicam Logarithmum hunc exprimentem, $b + \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \frac{b}{5}$ &c. talem esse; unde denuò veritas Prop. XVI. constat.

Coroll. 3. Dato quovis Logarithmo putà binarii, determinari potest ex illo curvæ subtangens b; cum enim posita BD ∞ 1 ∞ AB, adeoque AD ∞ ρκ ∞ 2, ostensum sit Aρ Log-um binarii esse $\infty\ b - \frac{b}{2} + \frac{b}{3} - \frac{b}{4}$ &c. $\infty\ b$ in $\overline{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}}$ &c. erit vicissim $b\ \infty$

$$\frac{Log.\ 2.}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\ \&c.}$$

XLVIII. *Dato Sinu complementi reperire Logarithmum Sinus recti per seriem.* Fig. 6.

In eadem fig. centro A per B descriptus esto circuli quadrans BHρ, quem producta EI secet in H, erit AI seu RE sinus arcus Hρ, & AR ejus Logarithmus, existente vid. radii AB ceu unitatis Logarithmo o. Ponatur sinus complementi IH $\infty\ x$, ut fiat sinus rectus AI seu RE $\infty \sqrt{1 - xx}$, ejusque elementum EF $\infty \frac{-x\,dx}{\sqrt{1 - xx}}$, erit ex nat. gen. curv. EF $\frac{-x\,dx}{\sqrt{1 - xx}}$ ad FG, elementum Log-i AR; ut RE, $\sqrt{1 - xx}$ ad subtangentem Logarithmicæ RN quæ sit 1; adeoque FG $\infty \frac{-x\,dx}{1 - xx} \infty$ (per XXXVI) $-x\,dx$

$-x^3$

$- x^3 dx - x^5 dx - x^7 dx$ &c. Quare ſummando fient omnia FG, ſeu Log-us AR $\infty - \frac{xx}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} - \frac{x^{10}}{10}$ &c. negativus ſcil. quia numerus ejus RE minor eſt unitate AB; at ſi fiat poſitivus $\frac{xx}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8}$ &c. hoc eſt, ſi AR transferatur ex altera parte in Aϵ, erit is propriè Logarithmus rectæ $\epsilon\iota$, id eſt (ex natura Log-orum) tertiæ proportionalis ad ipſum ſinum RE & radium AB; qui tamen Log us immediatè quoque reperiri potuiſſet ex valore numeri ſui $\epsilon\iota \infty \frac{1}{\sqrt{1-xx}}$.

Idem etiam D. Leibnitius Act. Lipſ. 1691. p. 180. eleganter hoc modo:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Log.}\,\overline{1-x} \infty -y \infty -x - \frac{xx}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\ \&c. \\ \text{Log.}\,\overline{1+x} \infty +y \infty +x - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\ \&c. \end{array}\right\} \text{per præc.}$$

$$\text{Log.}\,\overline{1-xx} \infty \text{ (ex nat. log.)}$$

$$\text{Log.}\,\overline{1-x} + \text{log.}\,\overline{1+x} \infty -xx \quad - \frac{x^4}{2} \quad - \frac{x^6}{3}\ \&c.$$

$$\text{Log.}\sqrt{\overline{1-xx}} \infty \tfrac{1}{2}\text{log.}\,\overline{1-xx} \infty - \frac{xx}{2} \quad - \frac{x^4}{4} \quad - \frac{x^6}{6}\ \&c.$$

Coroll. Poſito ſinu complementi HI hujus fig. ∞ BI vel Bι fig. 1. æquabitur ▭lum ſub Logarithmo ſinus recti AR & radio AB dimidio exceſſui, quo ſpatium hyperbolicum CBIO ſuperat alterum CB$\iota\iota$. Patet ex Cor. 1. XLII, ubi CBIO − CB$\iota\iota$ ſerie præſentis dupla expreſſum legitur. Cæterùm moneri potuiſſet ibi, quod ſumta z tertia proportionali ad 1 & x, ſeu poſita $z \infty xx$, ſeries illa convertatur in aliam $z + \frac{zz}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}$ &c. qua quoque ſpatium hyperbolicum, putà CBGM, exiſtente BG ∞ z vel xx, innuitur. Hinc enim patet, quòd CBIO − CB$\iota\iota$ ∞ CBGM; & CBIO − CBGM ſeu MGIO ∞ CB$\iota\iota$; adeoque (cum his poſitis AI, $1-x$ ſit ad AG, $1-xx$, ſicut AB, 1 ad Aι, $1+x$) quòd ſumtis AI, AG, AB, Aι utcunque proportionalibus ſpatia ſegmentis IG, Bι inſiſtentia ſemper futura ſunt æqualia.

XLIX. *Applicatam Curvæ Catenariæ exhibere per seriem.* Fig. 6.

Esto Curva μ B λ, quam Catena ab extremitatibus suis liberè suspensa proprio pondere format, dicta *Catenaria*; cujus centrum A, vertex B, axis ABD, parameter AB ∞ 1, abscissa Aι ∞ z, & applicata $\iota\lambda$ vel $\iota\mu$ ∞ y. Constat ex iis, quæ Act. Lips. 1691. p. 274. &c. hac de Curva memoriæ prodita leguntur, elementum applicatæ dy esse $\infty \frac{dz}{\sqrt{zz-1}}$. Hinc ad tollendam surditatem pono $\sqrt{zz-1} \infty t - z$; unde fit $z \infty \frac{tt+1}{2t}$, $dz \infty \frac{tt-1}{2tt} dt$, $\sqrt{zz-1} \infty t - z \infty \frac{tt-1}{2t}$, ac denique $\frac{dz}{\sqrt{zz-1}}$ (dy) $\infty \frac{dt}{t}$. Quam porrò fractionem ut in seriem convertam, facio denominatorem bimembrem, substituendo $1+x$ loco t, & dx loco dt; eritque $\frac{dt}{t}$ seu dy $\infty \frac{dx}{1+x} \infty$ (per XXXVII) $dx - xdx + xxdx - x^3dx + x^4dx$ &c. unde omnia dy seu $y \infty x - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ &c. Quoniam autem $z \infty \frac{tt+1}{2t}$, hoc est, $tt \infty 2zt - 1$, & t seu $1 + x \infty z + \sqrt{zz-1}$, prodibit $x \infty z - 1 + \sqrt{zz-1} \infty$ (facta ιD $\infty \sqrt{zz-1}$) Bι + ιD ∞ BD; igitur data Aι, z dabitur BD, x, indeque $\iota\lambda$ seu y per seriem.

Coroll. Ex serie inventa collata cum Prop. XLVII. liquet, y esse Logarithmum numeri x; unde data Logarithmica κBC, cujus subtangens ∞ AB ∞ 1, puncta Catenariæ reperire proclive. Cùm enim z, hoc est, Aι vel $\sigma\lambda$ (Sμ) $\infty \frac{tt+1}{2t} \infty \frac{1}{2}t + \frac{1}{2t}$, patet, abscissis hinc inde Logarithmis æqualibus Aσ (AS) ordinatam Catenariæ $\sigma\lambda$ (Sμ) semissem esse oportere summæ duarum ab AB æquidistantium ordinatarum Logarithmicæ $\sigma\kappa$ & SC, quarum illa ∞ AD ∞ t, hæc ex natura Log. $\infty \frac{1}{t}$. Atque in hoc ipso consistit elegantissima hujus Curvæ constructio Leibnitiana, quam videsis in Act. Lips. 1691. p. 277. seqq.

L. *Datis*

L. *Datis latitudine loci alicujus in Curva Loxodromica & angulo Rumbi cum meridiano, exhibere longitudinem loci per seriem.* Fig. 3.

Lineam Rumbicam seu Loxodromicam vocant Nautæ, quam navis secundùm eundem venti Rumbum constanter incedens in superficie globi terr-aquei describit; adeoque curva est, quæ omnes meridianos eodem angulo obliquo intersecat. Incipit hæc in Æquatore, indeque versus alterutrum polorum obliquè recedendo, tandem in ipsum polum, quem infinitis gyris ambit, definit. Sumto in fig. 3. sinus totus, idemque & radius Æquatoris, $AC \propto 1$, BCD meridianus, B & D poli, tangens anguli Rumbici $\propto t$, H punctum in Loxodromica, ejus latitudo HC, sinus latitudinis AE, & sinus complementi HE qui vocetur z, longitudo verò seu arcus æquatoris inter meridianum loci H & principium Loxodromicæ interceptus dicatur x. His positis, per illa quæ in Act. Lips. 1691. p. 284. ostensa sunt, invenitur elementum longitudinis $dx \propto \frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}}$: ad cujus tentandam reductionem pono primò $z \propto \frac{1}{p}$; unde fit $dz \propto \frac{-dp}{pp}$, $\frac{dz}{z} \propto \frac{-dp}{p}$, $\sqrt{1-zz} \propto \frac{\sqrt{pp-1}}{p}$, & denique $\frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}}$ $(dx) \propto \frac{tdp}{\sqrt{pp-1}}$; porrò quidem memini, ejusdem formæ fuisse elementum Catenariæ in præc. pergo ponere sicut ibi, $\sqrt{pp-1} \propto p-q$, indeque elicio $\frac{tdp}{\sqrt{pp-1}}$ $(dx) \propto \frac{-tdq}{q}$, ac rursum statuendo $q \propto 1-r$ tandem obtineo $\frac{-tdq}{q}$ (dx) $\propto \frac{tdr}{1-r}$; quæ quidem quantitas etiam immediatè elici potuisset ex quantitate $\frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}}$ si statim fecissem $z \propto \frac{2-2r}{2-2r+rr}$: at in tales hypotheses incidere sæpenumerò difficile est, nisi jam usu compertum habeatur, quæ formulæ in quas transformari possint. Nota, $r \propto AC - BI$, excessui nempe radii suprà tangentem semissis complementi latitudinis puncti H; etenim supposita $BI \propto 1-r$, ductaque recta BH, cum similia sint triangula HEB, ABI, erit HE, z, ad EB, $1-\sqrt{1-zz}$, ut AB, 1, ad BI, $1-r$, unde

resultat $z \infty \frac{2-2r}{2-2r+rr}$, ut oportet. Conversa autem per XXXVI. inventa quantitate $\frac{tdr}{1-r}$ in seriem, habetur $dx \infty tdr + trdr + trrdr + tr^3dr$ &c. & facta summatione $x \infty tr + \frac{trr}{2} + \frac{tr^3}{3} + \frac{tr^4}{4}$ &c. Patet igitur, quomodo ex data tangente semissis complementi latitudinis inveniatur longitudo.

Sciendum autem, elementum longitudinis $\frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}}$ adhuc aliter posse reduci, statuendo nempe $\sqrt{1-zz} \infty y$; hinc enim fit $z \infty \sqrt{1-yy}$, $dz \infty \frac{-ydy}{\sqrt{1-yy}}$, & $\frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}}$ (dx) $\infty \frac{tdy}{1-yy} \infty$ (per XXXVI) $tdy + tyydy + ty^4dy + ty^6dy$ &c. ac deniq; omnia dx seu $x \infty ty + \frac{ty^3}{3} + \frac{ty^5}{5} + \frac{ty^7}{7}$ &c. ubi perspicuum est, y seu $\sqrt{1-zz} \infty$ AE sinui recto arcus HC; unde constat ratio definiendi etiam quæsitum ex sinu recto latitudinis, quemadmodum fecit Dn. Leibnitius Act. Lipſ. 1691. p. 181. Et patet, si in calculo, per quem ad initio memoratam æquationem $dx \infty \frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}}$ perveni, loco quantitatis indeterminatæ ipsum sinum rectum AE præ sinu complementi HE selegissem, me statim ad alteram æquationem immediatè in seriem convertibilem $dx \infty \frac{tdy}{1-yy}$ perventurum fuisse. Cæterum ex eo, quod duæ inventæ series eandem quantitatem x denotant, obiter concludimus, quòd si in circulo sinus cujuslibet arcus AE dicatur y, & AC — BI excessus radii suprà tangentem semissis complementi vocetur r, perpetuò futurum sit $y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}$ &c. ∞ $r + \frac{rr}{2} + \frac{r^3}{3}$ &c. Notamus etiam, si locus H sit in ipso polo, quo casu $r \infty 1 \infty y$, fore $x \infty t + \frac{t}{2} + \frac{t}{3} + \frac{t}{4}$ &c. vel $\infty t + \frac{t}{3} + \frac{t}{5}$ &c. quarum serierum summæ cum sint infinitæ per XVI, docent longitudinem loci H quoque infinitam esse, adeoque, quod dixi, curvam loxodromicam infinitis polum gyris ambire, priusquam in ipsum incidat.

Coroll.

Coroll. 1. Si in eadem Loxodromica præter locum H alius sit locus notæ latitudinis, cujus sinus rectus $= v$, & excessus radii suprà tangentem semissis complementi $= s$, erit similiter ejus longitudo $= t$ in $v + \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5}$ &c. vel $= t$ in $s + \frac{ss}{2} + \frac{s^3}{3}$ &c. adeoque differentia longitudinum utriusque loci erit utriusque seriei differentia, np. t in $\frac{y = v}{1} + \frac{y^3 = v^3}{3} + \frac{y^5 = v^5}{5}$ &c. vel, t in $\frac{r = s}{1} + \frac{r^2 = s^2}{2} + \frac{r^3 = s^3}{3}$ &c. Hinc si in alia quadam Loxodromica duo concipiantur loca latitudine cum prioribus convenientia, erunt, manentibus y & v, vel r & s iisdem, differentiæ longitudinum ut tangentes angulorum, quos Rumbi faciunt ad meridianos. Vid. Act. Lipſ. 1691. p. 182. & 285.

Coroll. 2. Ex collatione harum serierum cum seriebus Propp. XLII. XLVI. & XLVII. liquet Problematis convenientia cum quadratura Hyperbolæ & Logarithmis. Speciatim notamus, quòd existente subtangente Logarithmicæ $= t$, quæsita longitudo puncti H sit ipse Logarithmus rectæ $1 - r$ seu BI, ut patet ex XLVII; vel etiam (cum D. Leibnitio loc. cit.) semissis Log-i quantitatis $\frac{1+y}{1-y}$ seu $\frac{DE}{EB}$, quod sic ostenditur:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Log.}\,\overline{1+y} = +ty - \frac{tyy}{2} + \frac{ty^3}{3} - \frac{ty^4}{4} + \frac{ty^5}{5} - \frac{ty^6}{6}\ \text{\&c.} \\ \text{Log.}\,\overline{1-y} = -ty - \frac{tyy}{2} - \frac{ty^3}{3} - \frac{ty^4}{4} - \frac{ty^5}{5} - \frac{ty^6}{6}\ \text{\&c.} \end{array}\right\} \text{per XLVII.}$$

$$\text{Log.}\,\overline{\frac{1+y}{1-y}} =$$

$$\text{Log.}\,\overline{1+y} - \text{log.}\,\overline{1-y} = 2ty \quad + \frac{2ty^3}{3} \quad + \frac{2ty^5}{5}\ \text{\&c.}$$

Coroll. 3. Data longitudine & latitudine loci, dabitur angulus Rumbi cum meridiano; cum enim $x = t$ in $r + \frac{rr}{2} + \frac{r^3}{3}$ &c. $= t$ in $y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}$ &c. erit $t, 1 :: x, r + \frac{rr}{2} + \frac{r^3}{3}$ &c. vel $y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}$ &c.

&c. id eſt, tangens anguli quæſiti ad ſinum totum, ut arcus longitudinis ad Log-um BI, vel ſemiſſem Log-i $\frac{DE}{EB}$; adeoque per Coroll. 1. hujus, ut differentia duarum longitudinum ad differentiam duorum Log-orum BI, vel ſemi-differentiam duorum $\frac{DE}{EB}$. Intellige hic Logarithmos acceptos in Curva, cujus ſubtangens ∞ radio ∞ 1. Nota, ſi deſideretur angulus Loxodromicæ, quæ non niſi poſt unam pluresve integras revolutiones in datum locum perducat, augendus eſt arcus differentiæ longitudinum integra peripheria æquatoris ejusve multiplo.

Schol. Ex hactenus dictis expeditus habetur modus conſtruendi *Scalam* quandam *Loxodromicam*: Eſto in Fig. 6. BM ε circumferentia æquatoris in gradus ſuos & graduum minutias diviſa; hæc extendatur in rectam AS axem Logarithmicæ CB $\varkappa$, ejuſque diviſionibus ordine ab A adſcribantur gradus longitudinum: tum ſumto indefinitè in circumferentia hac puncto M, biſectoque arcu M ε per rectam AT occurrentem tangenti $\varepsilon\varkappa$ in T, ducatur ex T recta TE axi AS parallela, ſecans Logarithmicam in E; ac denique ex E demittatur in axem perpendicularis ER; punctoque R adſcribatur numerus graduum in arcu BM: ſic habebuntur etiam gradus latitudinum; parataque erit Scala Loxodromica, quæ primario inſerviet Rumbo, cujus anguli tangens æquatur ſub tangenti Logarithmicæ. Numeri enim graduum cujusvis datæ latitudinis in ſcala ſtatim à latere aſpectui offerant reſpondentes longitudinis gradus. Eadem tamen etiam cuilibet Rumbo prodeſſe poterit, ſi fiat per Coroll. 1. hujus, ut ſubtangens Logarithmicæ, è qua ſcala conſtructa eſt, ad anguli Rumbici tangentem, ſic longitudo vel differentia longitudinum per ſcalam inventa ad longitudinem vel differentiam longitudinum quæſitam: adeo ut ſcala ejusmodi in uſum nautarum circino proportionis inſculpta, & lineæ partium æqualium, quæ longitudinum gradus repræſentarent, juxta poſita inſtrumentum foret omnium forſan, quæ Naturæ hactenus tractarunt, compendioſiſſimum & utiliſſimum. Sed de his ſatis.

Antequam

Antequam pergamus, Lector advertere potest, quòd hucusque in differentialium summatione pro quovis elemento semper ejus integrale purum seu absolutum substituimus, velut x *pro* dx, $\frac{xx}{2}$ *pro* xdx *&c. At scire ipsum volumus, hoc minimè esse perpetuum; quanquam enim una eademque quantitas* x *non nisi unum habeat differentiale* dx, *idem tamen differentiale* dx *infinita habet integralia, unum quidem purum* x, *reliqua admissione quantitatum constantium affecta* x + a, x — b &c. *quorum in summationis negotio pro re nata nunc hoc nunc illud seligendum est, neque adeo sine praesenti hallucinationis periculo indiscriminatim semper purum adsumi potest. Restat itaque, ut ad vitandum scopulum, quem communem ferè esse video omnibus iis, qui calculum hunc incautius tractant, subjiciamus adhuc ejus rei exemplum in uno alterove Problemate, è cujus enodatione Lectori constare possit, undenam & quibus criteriis dignoscatur, quid pro quovis semper elemento summando substitui conveniat.*

L I. *Exhibere longitudinem Curvae Parabolicae per seriem.* Fig. 4.

Fingamus BCD Curvam esse Parabolam, cujus vertex B, axis BG, latus rectum $\infty\ a$, abscissa BG $\infty\ x$, applicata GD $\infty\ y$, ipsa BCD curva $\infty\ s$; proinde elem. FG vel CH $\infty\ dx$, DH $\infty\ dy$, & CD $(\sqrt{dx^2 + dy^2})\ \infty\ ds$. Erit ex natura Curvae $ax \infty yy$; hinc differentiando $adx \infty 2ydy$, quadrandoque $aadx^2$ $(aads^2 - aady^2) \infty 4yydy^2$, & facta transpositione $aads^2 \infty aady^2 + 4yydy^2$, extractaque tandem radice $ads \infty dy\sqrt{aa + 4yy}$, quae quantitas est, de qua summanda agitur. Ad surditatem primò eliminandam pono $\sqrt{aa + 4yy} \infty z - 2y$, fiet $aa \infty zz - 4zy$, & $y \infty \frac{zz - aa}{4z}$; hinc $dy \infty \frac{zz + aa}{4zz} dz$, nec non $\sqrt{aa + 4yy}$ $(z - 2y) \infty \frac{zz + aa}{2z}$, adeoque $dy\sqrt{aa + 4yy}$ $(ads) \infty \frac{z^4 + 2aazz + a^4}{8z^3} dz \infty$ (membris separatim positis) $\frac{zdz}{8} + \frac{aadz}{4z} + \frac{a^4dz}{8z^3}$, de quorum nunc summis dispiciendum. Hunc in finem considero relationem, quam habet assumta litera indeterminata z ad ordinatas Curvae nostrae, eamque ex facta hyp. $\sqrt{aa + 4yy} \infty z - 2y$ cognosco talem esse, ut existente $y \infty 0$, z non pariter evanescat, sed

sit ∞a, & quod crescente y eò fortius crescere debeat z; quapropter extensa concipiatur ipsa z in recta DB fig. 3. à puncto D, & sit prima DA, quæ nascenti y respondet, ∞a, ultimaque z, quæ respondet ultimæ y seu applicatæ GD fig. 4. esto DE. Tum fluere intelligatur ab A ad E indefinita recta AK vel EH, æqualis ubique $\frac{zz}{16}$ (integrali scil. puro primi membri $\frac{zdz}{8}$) minimaque adeo in A & $\infty \frac{aa}{16}$; sic ipsum fluentis lineæ incrementum fiet $\frac{zdz}{8}$, & omnia incrementa quæ capit linea, dum ex A movetur in E, repræsentabunt omnia $\frac{zdz}{8}$, quæ ordinatis y à minima (o) ad ultimam (GD) ordine respondent, h. e. quæ pertinent ad Curvæ Parabolicæ portionem rectificandam BD (fig. 4.) Constituunt autem omnia illa incrementa, ut liquet, non integram EH ($\frac{zz}{16}$) sed excessum tantum ejus suprà rectam AK ($\frac{aa}{16}$) hoc est, EH — AK seu $\frac{zz-aa}{16}$. Integrale igitur primi membri $\frac{zdz}{8}$, quod huc quadrat, est $\frac{zz-aa}{16}$. Similiter pro integrando tertio membro $\frac{aadz}{8z^3}$, fingo z extendi in recta AD fig. 1. à puncto A, primamque quæ nascenti y respondet esse AB ∞a, & quæ respondet ultimæ, AD; hinc fluere concipio à B versus D quantitatem $\frac{aa}{16zz}$, ceu integrale purum ipsius $\frac{aadz}{8z^3}$, putà rectam BC vel DQ, quæ proin maxima erit in B & $\infty \frac{aa}{16}$, indeque versus D decrescet; decrementa itaque, quæ patitur linea BC quousque pervenit in DQ, denotabunt omnia elementa $\frac{aadz}{8z^3}$, quæ portioni Curvæ Parabolicæ BD (fig. 4.) respondent: sed omnia illa decrementa, ut apparet, non efficiunt rectam DQ seu $\frac{aa}{16zz}$, verum potius BC — DQ seu $\frac{aa}{16}$ — $\frac{aa}{16zz}$; quapropter integrale tertii membri $\frac{aadz}{8z^3}$ huc pertinens

∞aa

$\infty \frac{aa}{16} - \frac{a^4}{16zz}$, summaque adeo primi & tertii ($S\frac{zdz}{8} + S\frac{a^4dz}{8z^3}$) $\infty \frac{zz-aa}{16} + \frac{aa}{16} - \frac{a^4}{16zz} \infty \frac{z^4-a^4}{16zz}$.

Restat intermedium adhuc membrum expediendum $\frac{aadz}{4z}$. Hoc cum absolutè summari nequeat, in seriem converto, ponendo prius $z \infty a+t$, ut denominator fiat bimembris; hinc enim fit $\frac{aadz}{4z} \infty \frac{aadt}{4a+4t}$, ∞ (per XXXVII) $\frac{adt}{4} - \frac{tdt}{4} + \frac{ttdt}{4a} - \frac{t^3dt}{4aa}$ &c. & facta summatione, $S\frac{aadz}{4z} \infty \frac{at}{4.1} - \frac{tt}{4.2} + \frac{t^3}{4.3a} - \frac{t^4}{4.4aa} + \frac{t^5}{4.5a^3}$ &c. Nota, quod hic pro quolibet seriei termino substituam ejus integrale purum, quoniam ex æquatione $z \infty a+t$ colligo, quod existente $z \infty a$ (hoc est $y \infty 0$) ipsa t, ut & quantitates fluentes omnes, $\frac{at}{4.1}$, $\frac{tt}{4.2}$, $\frac{t^3}{4.3a}$ &c. quoque sint $\infty 0$, id est, quod hæ à 0 fluere seu incrementa sumere occipiant; hinc enim manifestè liquet, omnia ipsarum crementa, nempe omnia $\frac{adt}{4}$, $\frac{tdt}{4}$ &c. ipsis quantitatibus ultimis $\frac{at}{4}$, $\frac{tt}{4.2}$ &c. æqualia fore. Quod idem quoque, si quis examinet, in omnibus præcedentium Propp. exemplis contingere observabit, indeque concludet, rectè à nobis factum, quod ibidem inter summandum pura semper integralia assumserimus, tametsi ejus rei rationem disertè non adjecerimus. Sed revertamur ad propositum: Inventa summa medii membri $\frac{aadz}{4z}$, si reliquorum summæ suprà repertæ adjiciantur, emergit summa omnium $S\frac{zdz}{8} + S\frac{aadz}{4z} + S\frac{a^4dz}{8z^3}$, hoc est, $as \infty \frac{z^4-a^4}{16zz} + \frac{at}{4.1} - \frac{tt}{4.2} + \frac{t^3}{4.3a} - \frac{t^4}{4.4aa}$ &c. & facta divisione per a, longitudo Curvæ s seu BD $\infty \frac{z^4-a^4}{16azz} + \frac{t}{4.1} - \frac{tt}{4.2a} + \frac{t^3}{4.3aa} - \frac{t^4}{4.4a^3}$ &c. quæ denique posita $a \infty t \infty 4$, & $z \infty a+t \infty 8$, fit $\frac{15}{16} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c, unde cum sit hoc casu $y \infty \frac{zz-aa}{4z} \infty \frac{3}{2}$, & x

$\infty \frac{yy}{a} \infty \frac{9}{16}$, ſequitur, quod exiſtente latere recto Parabolæ 4, & abſciſſa BG $\frac{9}{10}$, aut applicata GD $\frac{3}{2}$, longitudo Curvæ Parabolicæ BD æquetur $\frac{15}{16} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c.

Coroll. Ex ſerie collata cum XLII. Curvam Parabolicam cum Spatio Hyperbolico inter Aſymptotas comparandi modus innoteſcit. Sufficit monuiſſe.

LII. *Rectificare Curvam Logarithmicam per ſeriem & aliter.* Fig. 6.

Inſiſtat axi SAσ Curva Logarithmica CBκ, cujus ordinata AB ∞ 1, ſubtangens AK $\infty\, b$, alia quævis applicata RE ($\rho\varepsilon$) $\infty\, z$, ejusque elementum EF ($\varepsilon\varphi$) $\infty\, dz$; quæritur rectificatio portionis Curvæ BE (Bε). Quoniam per XLVII. elementum abſciſſæ AR (Aρ) nempe FG ($\varphi\gamma$) $\infty \frac{bdz}{z}$, erit EG^2 (EF^2 + FG^2) $\infty\, dz^2 + \frac{bbdz^2}{zz} \infty \frac{zz+bb}{zz} dz^2$, indeque elementum curvæ EG ($\varepsilon\gamma$) $\infty \frac{dz\sqrt{zz+bb}}{z} \infty$ (terminis fractionis per $\sqrt{zz+bb}$ æque - multiplicatis) $\frac{zzdz+bbdz}{z\sqrt{zz+bb}} \infty \frac{zdz}{\sqrt{zz+bb}} + \frac{bbdz}{z\sqrt{zz+bb}}$, de quorum ſummatione hic quæritur. Prioris membri integrale purum eſt $\sqrt{zz+bb}$, quod (ob primam $z \infty$ AB ∞ 1) inde à $\sqrt{1+bb}$ decreſcere (creſcere) intelligitur ad uſque $\sqrt{zz+bb}$; adeo ut omnia ejus decrementa (incrementa) huc quadrantia, ſeu S $\frac{zdz}{\sqrt{zz+bb}}$ ſint $\infty \sqrt{1+bb} - \sqrt{zz+bb}$ ($\sqrt{zz+bb} - \sqrt{1+bb}$) hoc eſt, æqualia differentiæ duarum in B & E (ε) tangentium rectarum BK & EN ($\varepsilon\nu$). Poſterioris membri $\frac{bbdz}{z\sqrt{zz+bb}}$ integrale, quoniam ita planum non eſt, prævia reductione inveſtigare conor, eaque ſimili huic, qua ſuprà Prop. L. pro Curva Loxodromica fui uſus, cum in elementis analogiam quandam obſervem. Pono itaque primò $z \infty \frac{bb}{p}$, eoque mediante transformo $\frac{bbdz}{z\sqrt{zz+bb}}$ in $\frac{-bdp}{\sqrt{bb+pp}}$; deinde facio $\sqrt{bb+pp} \infty\, p+q$, ſive $p \infty \frac{bb-qq}{2q}$;

inde-

indeque elicio $\frac{-bdp}{\sqrt{bb+pp}}$ $\left(\frac{bbdz}{z\sqrt{zz+bb}}\right) \infty \frac{bdq}{q}$, quod per XLVII. elementum esse cognosco abscissæ cujusdam in Logarithmica, quam tandem ita determino: Quoniam $p \infty \frac{bb-qq}{2q}$, & $z \infty \frac{bb}{p}$, fiet $z \infty \frac{2bbq}{bb-qq}$, sicut vicissim $q \infty \frac{-bb+b\sqrt{zz+bb}}{z}$; & quia prima $z \infty$ AB ∞ 1, erit quæ huic respondet prima $q \infty -bb+b\sqrt{1+bb}$. Pro constructione, abscindo in tangente BK partem K$\kappa \infty$ KA, in ordinata AB partem BV ∞ Bκ, & in V statuo VX parallelam ipsi AK; pari modo in tangente $\nu\iota$ (idem imaginatione supple in NE) sumo νr ∞ $\nu\varepsilon$, hinc ιv ∞ ιr, & duco vx parallelam $\nu\varepsilon$; quo pacto constat fore VX ∞ primæ $q \infty -bb + b\sqrt{1+bb}$, & vx ∞ ultimæ $q \infty \frac{-bb+b\sqrt{zz+bb}}{z}$. Quocirca si ambæ VX & vx, vel etiam loco harum sola quarta proportionalis ad VX, vx & AB (quæ sit SC vel σx) applicetur Logarithmicæ, erit intercepta applicatis VX & vx axis portio, vel etiam ipsis AB, SC (σx) interjecta portio AS (Aσ) [ex natura enim curvæ æqualis utrisque intercipietur] ∞ S$\frac{bdq}{q}$, id est, omnibus $\frac{bdq}{q}$, seu omnibus $\frac{bbdz}{z\sqrt{zz+bb}}$ pro portione curvæ BE (Bι) rectificanda inservientibus. Et quoniam posita differentia inter AB & SC (σx) ∞x, resegmentum axis AS (Aσ) $\infty bx \; 8 \; \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} \; 8$. $\frac{bbdz}{z\sqrt{zz+bb}}$ summa etiam per seriem reperta. Addicis itaque amborum summis fient omnia EG ($\iota\gamma$) seu longitudo curvæ BE (Bι) $\infty \sqrt{1+bb} = \sqrt{zz+bb} + bx \; 8 \; \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} \; 8 \; \frac{bx^4}{4}$ &c. ∞ differentiæ tangentium BK & EN ($\iota\nu$) unà cum resegmento axis AS (Aσ).

Cum non omnes quantitates surdæ, nedum transcendentes, differentialibus admixtæ præcedentibus modis in rationales transformari, inque series converti possint, ad alia subinde nobis artificia recurrendum est ad obtinendum propositum, inter quæ ob universalitatem suam eminent Interpola-

 tiones

tiones Wallisianæ, *vel* Exaltatio binomii ad potestatem indefinitam, *vel* Assumtio seriei fictæ instar quæsitæ, *aut consimilia subsidia alia, quorum pro re nata nunc unum nunc plura in usum verti queunt. Nos pauca eorum specimina post generalia nonnulla in uno alterove exemplo subjungemus.*

LIII. *Quantitatem quamcunque surdam vel irrationalem in seriem infinitam rationalium convertere per interpolationes Wallisianas.*

Reducatur quantitas rationalis, cujus potestas fracta sive radix aut latus quæritur, ad fractionem hujus formæ $\frac{l}{m-n}$ (ponendo $m < n$). Hujus fractionis potestates integræ, prima, secunda, tertia, &c. convertantur ope divisionis continuæ in totidem series, per XXXVI. usque ad XL. Propp. hoc pacto:

Exp.	*Potest.*
0	$1 \infty 1 + 0 + 0 + 0 + 0$ &c.
1	$\frac{l}{m-n} \infty \frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m3} + \frac{ln3}{m4} + \frac{ln4}{m5}$ &c.
2	$\frac{ll}{Q:m-n} \infty \frac{ll}{mm} + \frac{2lln}{m3} + \frac{3llnn}{m4} + \frac{4lln3}{m5} + \frac{5lln4}{m6}$ &c.
3	$\frac{l3}{C:m-n} \infty \frac{l3}{m3} + \frac{3l3n}{m4} + \frac{6l3nn}{m5} + \frac{10l3n3}{m6} + \frac{15l3n4}{m7}$ &c.
4	$\frac{l4}{Bq:m-n} \infty \frac{l4}{m4} + \frac{4l4n}{m5} + \frac{10l4nn}{m6} + \frac{20l4n3}{m7} + \frac{35l4n4}{m8}$ &c.

In his seriebus observabis, coëfficientes primorum terminorum constituere unitates, coëfficientes secundorum numeros laterales, tertiorum trigonales, quartorum pyramidales, & sic porrò; terminos verò puros ordine oriri ex ductu fractionis $\frac{l}{m}$ (ad potestatem elevatæ similem ei ad quam elevanda fractio $\frac{l}{m-n}$) in $1, \frac{n}{m}, \frac{nn}{mm}, \frac{n3}{m3}$, &c. Hinc ad inveniendas potestates intermedias sive radices (ceu media quædam geometrica, quorum exponentes sunt arithmeticè medii inter exponentes integrorum) numeri terminorum figurati tantum sunt interpolandi juxta doctrinam Wallisii Prop.

Prop. 172. ſeqq. Arithm. Infin. Eſt vero, poſito exponente vel indice poteſtatis p, generalis character lateralium quoque p, trigonalium $\frac{p \cdot \overline{p+1}}{1 \cdot 2}$, pyramidalium $\frac{p \cdot \overline{p+1} \cdot \overline{p+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, &c. ut ibid. docetur Prop. 182. Quare ſi p interpreteris per $\frac{1}{2}$, invenies poteſtatem dimidiam quantitatis $\frac{l}{m-n}$, nempe $\sqrt{\frac{l}{m-n}}$ ꝏ $\sqrt{\frac{l}{m}}$ in $\overline{1+\frac{1n}{2m}+\frac{1.3nn}{2.4mm}+\frac{1.3.5n^3}{2.4.6m^3}+\frac{1.3.5.7n^4}{2.4.6.8m^4}+}$ &c. ſi p explices per $\frac{1}{3}$, habebis trientem poteſtatis ſeu $\sqrt{C.}\frac{l}{m-n}$ ꝏ $\sqrt{C.}\frac{l}{m}$ in $\overline{1+\frac{1n}{3m}+\frac{1.4nn}{3.6mm}+\frac{1.4.7n^3}{3.6.9m^3}+\frac{1.4.7.10n^4}{3.6.9.12m^4}+}$ &c. ſi per $\frac{3}{2}$, obtinebis ſeſquialteram poteſtatem ſeu $\frac{l}{m-n}\sqrt{\frac{l}{m-n}}$ ꝏ $\frac{l}{m}\sqrt{\frac{l}{m}}$ in $\overline{1+\frac{3n}{2m}+\frac{3.5nn}{2.4mm}+\frac{3.5.7n^3}{2.4.6m^3}+\frac{3.5.7.9n^4}{2.4.6.8m^4}+}$ &c. &c.

Coroll. Quoniam poſitis l, m & n æqualibus inter ſe, fit quantitas $\frac{l}{m-n}$ ꝏ $\frac{l}{0}$ ꝏ ∞, ſeries autem prædictæ abeunt in ſeries purorum coëfficientium $1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}$ &c. $1+\frac{1}{3}+\frac{1.4}{3.6}+\frac{1.4.7}{3.6.9}$ &c. $1+\frac{3}{2}+\frac{3.5}{2.4}+\frac{3.5.7}{2.4.6}$ &c. colligimus, ſeries ejusmodi natas ex ductu continuo fractionum, quarum numeratores & denominatores in progreſſ. arithm. per differentias primo denominatori æquales inſurgunt, ſummas fundere infinitas; quod apertius ita conſtabit: Minue numeratores, eosque æquales conſtitue denominatoribus ſingulos ſingulis, nempe ſecundum numeratorem primo denominatori, tertium ſecundo, 4$^{\text{um}}$ 3$^{\text{tio}}$, & ita deinceps; ſic enim ex. gr. loco primæ ſeriei habebis $1+\frac{1}{2}+\frac{1.2}{2.4}+\frac{1.2.4}{2.4.6}+\frac{1.2.4.6}{2.4.6.8}$ &c. ꝏ (perimentibus ſe mutuo dictis numeris) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$ &c. ꝏ ∞, per Cor. 2. XVI, unde fortius altera $1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}$ &c. ob numeratores majores infinita erit. Cæterùm poſtremus terminus cujusque ſeriei nunc nullus eſt nunc infinitus, prout exponens poteſtatis p, vel prima ſeriei fractio, unitate minor eſt majorve: Sic

ultimus

ultimus terminus primæ ſeriei $\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}$ &c. nullus eſt; nam ſi quantus eſſet, etiam hic foret quantus $\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}$ &c. utpote cujus ſinguli factores ſingulis factoribus præcedentis termini ordine ſumtis ſunt majores; quare & utriusque productum quantum foret, np. $\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}$ in $\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}$ &c. ꝏ (permiſtis alternatim utriusque factoribus) $\frac{1.2.3.4.5\ldots\ldots\infty-1}{2.3.4.5.6\ldots\ldots\infty}$ ꝏ (ob numeratores omnes primum ſequentes, & denominatores ultimum præcedentes ſe mutuò perimentes) $\frac{1}{\infty}$ ꝏ 0, quod abſurdum. Ultimus contra terminus tertiæ ſeriei $\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}$ &c. infinitus eſt; nam ſi finitus eſſet, etiam hic foret finitus $\frac{4.6.8.10}{3.5.7.9}$ &c. utpote cujus ſinguli factores ſingulis illius ſunt minores; quocirca & utriusque productum finitum foret, nempe $\frac{3.5.7}{2.4.6}$ &c. in $\frac{4.6.8}{3.5.7}$ &c. ꝏ $\frac{3.4.5.6\ldots\infty}{2.3.4.5\ldots\infty-1}$ ꝏ (deſtruentibus ſe mutuo numeratoribus qui ultimum præcedunt, & denominatoribus qui primum ſequuntur) $\frac{\infty}{2}$ ꝏ ∞, quod pariter abſurdum.

LIV. *Idem præſtare per exaltationem binomii ad poteſtatem indefinitam.*

Quantitas rationalis, cujus poteſtas per ſeriem deſideratur, ſit expreſſa per binomium $1+n$ (ponendo $1>n$). Hujus binomii poteſtas indefinita p, ut jam paſſim inter Geometras notum, per ſeriem exprimitur $1+\frac{p}{1}n+\frac{p.p-1}{1.2}nn+\frac{p.p-1.p-2}{1.2.3}n^3+\frac{p.p-1.p-2.p-3}{1.2.3.4}n^4$ $+$ &c. ubi perſpicuum eſt, quod quotiescunque exponens poteſtatis p eſt numerus integer & poſitivus, ſeries neceſſariò aliquando abrumpetur; quandoquidem in continuatione ulteriori coëfficientium $p.p-1.p-2.$ &c. neceſſariò tandem devenietur ad $p-p$ ꝏ 0; quod proin illum terminum & ab illo deinceps omnes evaneſcere facit. Sed quoties p numerus fractus eſt aut negativus, coëfficientes nunquam in nihilum abibunt, ac ideò ſeries in infinitum excurret: qua ratione habetur ex. gr. $\sqrt{1+n}$ (ubi p valet $\frac{1}{2}$) ꝏ

1+

$1 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2.4}nn + \frac{1.3}{2.4.6}n^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}n^4 +$ &c. & $\sqrt{C.\,1+n}$ (ubi p valet $\frac{1}{3}$) $\infty\ 1 + \frac{1}{3}n - \frac{2}{3.6}nn + \frac{2.5}{3.6.9}n^3 - \frac{2.5.8}{3.6.9.12}n^4$ &c. & $\frac{1}{\sqrt{1+n}}$ (ubi p notat $-\frac{1}{2}$) $\infty\ 1 - \frac{1}{2}n + \frac{1.3}{2.4}nn - \frac{1.3.5}{2.4.6}n^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}n^4 -$ &c. & pariter in cæteris.

Nota, quòd exaltatio binomii ad poteſtatem indefinitam & interpolationis negotium reipſa in idem recidunt, unoque & eodem nituntur fundamento, quod conſiſtit in proprietate quadam numerorum figuratorum ſupra jam prælibata Propoſ. XIX. ſed cujus demonſtrationem, ne hìc nimii ſimus, in aliam occaſionem reſervamus.

L V. *Duarum quantitatum indeterminatarum relationem unius ad alteram per ſeriem exprimere, ope aſſumtæ ſeriei fictæ inſtar quæſitæ.*

Ponatur alterutra indeterminatarum x & y, quarum relatio ad ſe invicem quæritur, putà y, æquari ſeriei $a + bx + cxx + ex^3 + fx^4$, &c. aut $a + bxx + cx^4 + ex^6$, &c. aut $a + bx^4 + cx^8 + ex^{12}$, &c. aut ſimili, prout opus videbitur; atque tum in quantitate vel æquatione propoſita loco y ſubſtituatur hæc ſeries, nec non loco dy & ddy, &c. ſeriei differentiale aut differentio-differentiale, &c. quo facto ex comparatione homologorum terminorum determinari poterunt aſſumti coëfficientes a, b, c, &c. Sequuntur Exempla:

L VI. *Invenire relationem coordinatarum Curvæ Elaſticæ per ſeriem.* Fig. 7.

Flectatur Elater in curvaturam AQR à potentia applicata in A, & trahente juxta directionem AZ; ſitque AB vel $RZ \infty a$, AE vel $PQ \infty x$, AP vel $EQ \infty y$, & $AQ \infty z$; oſtenſum eſt in Act. Lipſ. 1694. p. 272. & 1695. p. 538. naturam hujus curvæ exprimi æquatione $dy \infty \frac{xxdx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$, è qua qui methodo Diophanti, qua in præced. part. uſi fuimus, irrationalitatem tollere vellet, ætatem conſumeret; cum deprehenſum ſit à Geometris, ſummam vel differentiam duorum biquadratorum, qualis eſt $a^4 - x^4$, nunquam poſſe conſtituere qua-

dratum: Quare nobis confugiendum eſt vel ad Interpolationes, vel ad indefinitam Potentiam binomii, hoc pacto:

1. *Mod.* Interpretemur x^4 tam per l, quàm per n, & a^4 per m; erit $\frac{x^4}{a^4 - x^4} \infty \frac{l}{m-n}$; unde per LIII habetur $\sqrt{\frac{l}{m-n}}$, id eſt, $\sqrt{\frac{x^4}{a^4 - x^4}}$ aut $\frac{xx}{\sqrt{a^4 - x^4}} \infty \frac{xx}{aa} + \frac{1x^6}{2a^6} + \frac{1.3x^{10}}{2.4a^{10}} + \frac{1.3.5x^{14}}{2.4.6a^{14}} +$ &c. & (facta multiplicatione per dx) $\frac{xxdx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$ ſeu $dy \infty \frac{xxdx}{aa} + \frac{1x^6dx}{2a^6} + \frac{1.3x^{10}dx}{2.4a^{10}} + \frac{1.3.5x^{14}dx}{2.4.6a^{14}}$ &c. & denique ſummando, AP ſeu $y \infty \frac{x^3}{3aa} + \frac{1x^7}{2.7a^6} + \frac{1.3x^{11}}{2.4.11a^{10}} + \frac{1.3.5x^{15}}{2.4.6.15a^{14}} +$ &c.

2. *Mod.* Explicemus nunc a per 1, & $-x^4$ per n; erit $a^4 - x^4 \infty 1 + n$, & $\frac{1}{\sqrt{a^4 - x^4}} \infty \frac{1}{\sqrt{1+n}}$: unde per LIV. fit $\frac{1}{\sqrt{1+n}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{a^4 - x^4}} \infty 1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1.3}{2.4}x^8 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{12} +$ &c. & (multiplicand. per $xxdx$) $\frac{xxdx}{\sqrt{a^4 - x^4}} \infty xxdx + \frac{1}{2}x^6dx + \frac{1.3}{2.4}x^{10}dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{14}dx +$ &c. & integrando, $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2.7}x^7 + \frac{1.3}{2.4.11}x^{11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15}x^{15} +$ &c. ſeu denique ſupplendo unitatem, $\frac{x^3}{3aa} + \frac{1x^7}{2.7a^6} + \frac{1.3x^{11}}{2.4.11a^{10}} + \frac{1.3.5x^{15}}{2.4.6.15a^{14}} +$ &c. ut anteà.

Coroll. Sumta $x \infty a \infty 1$, fit tota $AZ \infty \frac{1}{3} + \frac{1}{2.7} + \frac{1.3}{2.4.11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15} +$ &c. Conf. Act. Lipſ. 1694. p. 274. & 369.

LVII. *Rectificare eandem Curvam ſeriem.* Fig. 7.

Quia æquatio curvæ, ut dictum, eſt $dy \infty \frac{xxdx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$, fiet quadrando $dy^2 \infty \frac{x^4dx^2}{a^4 - x^4}$ & $dz^2 \infty dy^2 + dx^2 \infty \frac{x^4dx^2}{a^4 - x^4} + dx^2 \infty \frac{a^4dx^2}{a^4 - x^4}$, adeoque $dz \infty \frac{aadx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$. Exponamus a^4 nunc per l, nunc per m, & x^4 per n, erit $\frac{aa}{\sqrt{a^4 - x^4}}$ ſeu $\sqrt{\frac{a^4}{a^4 - x^4}} \infty \sqrt{\frac{l}{m-n}}$; unde

per

per LIII. fit $\sqrt{\frac{l}{m-n}}$ five $\sqrt{\frac{a4}{a4-x4}} \infty 1 + \frac{1 x4}{2 a4} + \frac{1.3 x^8}{2.4 a^8} + \frac{1.3.5 x^{12}}{2.4.6 a^{12}}$ + &c. & (multiplic. per dx) $\frac{aadx}{\sqrt{a4-x4}}$ seu $dz \infty dx + \frac{1 x4 dx}{2 a4} + \frac{1.3 x^8 dx}{2.4 a^8} + \frac{1.3.5 x^{12} dx}{2.4.6 a^{12}}$ + &c. tandemque summando, z five $AQ \infty x + \frac{1 x5}{2.5 a4} + \frac{1.3 x9}{2.4.9 a8} + \frac{1.3.5 x13}{2.4.6.13 a^{12}}$ + &c. Idem etiam per LIV. simili modo ostendetur.

Coroll. Facta $x \infty a \infty 1$, habetur tota $AQR \infty 1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13}$ + &c. vid. Act. Lipf. 1694. p. 274.

LVIII. *Definire limites præcedentium serierum.* Fig. 7.

Quoniam series his methodis repertæ nimis lentè convergunt, non abs re erit, si modum ostendam, quo levi labore summis earum, quantum ad usum sufficit, approximare & limites constituere possimus. In exemplum propositæ sint proximæ duæ series, quibus exprimitur applicata Elasticæ BR vel AZ, & longitudo ipsius curvæ AR, nempe: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2.7} + \frac{1.3}{2.4.11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15}$ + &c. &, $1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13}$ + &c. Sumo quantitatem, cujus integrale haberi possit, datis $\frac{xxdx}{\sqrt{a4-x4}}$ & $\frac{aadx}{\sqrt{a4-x4}}$, è quibus series propositæ fluxerunt, affinem, putà $\frac{x^3 dx}{\sqrt{a4-x4}}$, cujus integrale est $\frac{aa-\sqrt{a4-x4}}{2}$, eamque pari methodo in seriem resolvo, & seriei terminis summatis pro x & a unitatem pono; quo pacto series emerget: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2.8} + \frac{1.3}{2.4.12} + \frac{1.3.5}{2.4.6.16}$ + &c. æqualis proinde $\frac{aa-\sqrt{a4-x4}}{2} \infty \frac{1}{2}$ seu 0. 5000000. Colligo jam singularum serierum terminos aliquot ab initio in unam summam (quod expeditè fit per Logarithmos) ex. gr. decem primos terminos, qui collecti efficiunt in prima serie 0. 5102560: in secunda serie 1. 2207187: in tertia 0. 4119014. Hujus igitur reliqui post

 decimum

decimum termini (ad complendum $\frac{1}{2}$ seu o. 5000000) constituent o. 0880986, qui numerus additus summæ 10 primorum terminorum in pr. & sec. serie exhibet o. 5983546 & 1. 3088173; summis totarum serierum justo minores, ob singulos tertiæ seriei terminos minores homologis terminis reliquarum.

Deinde, quia undecimi termini in tribus istis seriebus sunt $\frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17.19}{2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.43}$, $\frac{1.3.5\ldots\ldots19}{2.4.6\ldots20.41}$, $\frac{1.3.5\ldots\ldots19}{2.4.6\ldots20.44}$, liquet terminum hunc in serie tertia ad eundem in serie prima reciprocè esse ut 43 ad 44, & ad eundem in secunda ut 41 ad 44; terminorum verò sequentium singulos in tertia serie ad ejusdem ordinis terminos in reliquis seriebus habere rationem majorem quàm 43 ad 44, & quàm 41 ad 44: unde & summa omnium sequentium decimum in tertia serie ad summam omnium post decimum in reliquis seriebus majorem rationem habebit. Idcircò si fiat, ut 43 ad 44, nec non ut 41 ad 44, ita summa terminorum post decimum in tertia serie, nimirum o. 0880986, ad o. 0901474 & ad o. 0945448; erunt hi numeri majores summis terminorum decimum sequentium in prima & secunda serie: quapropter si addantur summis 10 priorum, quæ sunt o. 5102560 & 1. 2207187, erunt quoque numeri provenientes o. 6004034 & 1. 3152635 majores summis totarum serierum.

Reperti ergo sunt limites, quibus summæ primæ & secundæ seriei definiuntur: limites illius sunt o. 5983546 & o. 6004034; hujus 1. 3088173 & 1. 3152635: unde applicata *BR* vel *AZ* major est quàm o. 598, & minor quàm o. 601; ipsa verò curva *AR* > 1. 308, & < 1. 316, sic ut tres istæ lineæ *RZ*, *AZ* & *AQR* proximè se habeant ut 10, 6, 13. Conf. Act. Lips. 1694. p. 274.

Schol. Quoniam ex natura descensus gravium demonstratur, quòd tempus descensus penduli alicujus per quadrantem circuli ad tempus descensus perpendicularis per ejus radium eam rationem habet, quam habet Curva Elastica *AR* ad ejus axem *RZ*, h. e. majorem, ut ostendimus, quàm 1308 ad 1000, & minorem quàm 1316 ad 1000: tempus autem descensus perpendicularis per circuli radium ad tempus per semiradium se habet, ut $\sqrt{2}$ ad 1: & tempus per semiradium

miradium ad tempus per arcum minimum (consentiente Hugenio in Horol. Oscillat. p. 155.) ut diameter circuli ad ejus semiperipheriam, h. e. ut 226 ad 355: inferri potest ex æquo, quòd tempus descensus penduli per quadrantem integrum ad tempus descensus ejus per arcum minimum se habet in ratione majore quàm 3400 ad 2888, & in minore quàm 3400 ad 2869; unde rationem 3400 ad 2900, sive 34 ad 29, quam præfatus Auctor ibid. pag. 9. temporibus horum descensuum assignat, extra hos limites cadere liquet.

LIX. *Dati Logarithmi Numerum invenire per seriem.* Fig. 1.

Intelligatur Curva Logarithmica PCQ, cujus axis AD, subtangens constans $\infty\, t$, applicata $BC \infty 1$, Logarithmus datus BI $(B\iota)$ $\infty\, x$, ejusque Numerus IO (ιo) $\infty\, y$; erit ex generali curvarum natura $\pm\, dy . dx :: y . t$, adeoque $y \infty \pm \frac{tdy}{dx}$. Fiat juxta præscriptum Prop. LV. $y \infty 1 + bx + cxx + ex^3 + fx^4$ &c. & differentiando, $\frac{dy}{dx} \infty b + 2cx + 3exx + 4fx^3$ &c. eritque $1 + bx + cxx + ex^3 + fx^4$, &c. $(\infty y \infty \pm \frac{tdy}{dx}) \infty \pm bt \pm 2ctx \pm 3etxx \pm 4ftx^3 \pm 5gtx^4$, &c. & facta comparatione homologorum terminorum elicietur, $b \infty \pm \frac{1}{t}$, $c\ (\infty \pm \frac{b}{2t}) \infty \frac{1}{1.2.tt}$, $e\ (\infty \pm \frac{c}{3t}) \infty \pm \frac{1}{1.2.3t^3}$, $f\ (\infty \pm \frac{e}{4t}) \infty \frac{1}{1.2.3.4t^4}$, &c. unde valoribus istis coëfficientium b, c, e, &c. substitutis resultat $y \infty 1 \pm \frac{x}{t} + \frac{xx}{1.2tt} \pm \frac{x^3}{1.2.3t^3} + \frac{x^4}{1.2.3.4t^4} \pm$ &c. Conf. Act. Lips. 1693. p. 179.

Aliter idem absque differentialium adminiculo: Concipiatur Log-us BI $(B\iota)$ divisus in partes quotlibet æquales BE, EF, FG, &c. $(B\varepsilon, \varepsilon\varphi, \varphi\gamma$, &c.) quarum numerus sit n, & singulæ dicantur d, sic ut nd sit $\infty\, BI$ $(B\iota)$ $\infty\, x$. Tum applicatis curvæ rectis totidem EK, FL, GM, &c. $(\varepsilon\kappa, \varphi\chi, \gamma\mu$, &c.) jungantur extremitates C & K (κ) duarum BC, EK $(\varepsilon\kappa)$ per rectam CK $(C\kappa)$, sitque axis portio inter productam CK $(C\kappa)$ & applicatam BC intercepta $\infty\, t$; quo pacto propter triangula similia fiet $t . 1\ (BC) :: t \pm d . 1 \pm \frac{d}{t} \infty EK$ $(\varepsilon\kappa)$. Et

 quoniam

quoniam ob æquales BE, EF, FG, &c. ($B\epsilon$, $\epsilon\phi$, $\phi\gamma$, &c.) ipsæ BC, EK, FL, &c. (BC, $\epsilon\kappa$, $\phi\lambda$, &c.) in continua sunt proportione, earumque prima $BC \propto 1$, idcircò designabit FL ($\phi\lambda$) secundam potestatem, GM ($\gamma\mu$) tertiam, RN ($\varrho\nu$) quartam, &c. tandemque ultima IO (ιo) seu y ipsam n potestatem applicatæ EK ($\epsilon\kappa$) seu $1 \; 8 \; \frac{d}{t}$ (pro numero vid. particularum, in quas divisa est BI ($B\iota$); quæ quidem potestas per LIV. reperitur $\propto 1 \; 8 \; \frac{nd}{t} + \frac{n.n-1.dd}{1.2tt} \; 8 \; \frac{n.n-1.n-2d^3}{1.2.3t^3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.d^4}{1.2.3.4t^4}$ 8 &c. Quòd si jam numerus particularum n ponatur infinitus, producta CK ($C\kappa$) abibit in tangentem, & ipsa t in subtangentem Logarithmicæ, atque præthereà numeri 1, 2, 3, &c. evanescent præ n, sic ut $n-1$, $n-2$, $n-3$, tantundem valeant ac n: quare tum fiet $y \propto 1 \; 8 \; \frac{nd}{t} + \frac{nndd}{1.2tt} \; 8 \; \frac{n^3d^3}{1.2.3t^3} + \frac{n^4d^4}{1.2.3.4t^4} \; 8$ &c. $\propto$ (propter $nd \propto x$) $1 \; 8 \; \frac{x}{t} + \frac{xx}{1.2tt} \; 8 \; \frac{x^3}{1.2.3t^3} + \frac{x^4}{1.2.3.4t^4} \; 8$ &c. ut suprà.

Nota, quòd existente $x > t$, termini quidem seriei aliquousque crescunt, tandem tamen decrescere pedetentim occipiunt, ultimoque vergunt in nihilum. Nam sumtis ab initio m terminis, erit ex lege progressionis sumtorum ultimus $\frac{x^{m-1}}{1.2.3\ldots m-1.t^{m-1}}$, & sequens ultimum $\frac{x^m}{1.2.3\ldots m t^m}$; adeoque ratio illius ad hunc, ut mt ad x: unde cum ratio t ad x determinata sit, numerus verò terminorum m usque & usque major possit accipi, ratio quoque mt ad x tandem quavis data major fiet. Existente autem $x \propto$ vel $< t$, series ista, & aliæ hujus generis, statim ab initio celerrimè convergunt, eoque celeriùs quò minor x: unde discimus quod multo commodius & minori cum labore Logarithmorum Canon adornari possit, si per hanc Propos. ex Log-is datis Numeri, quàm si vicissim per XLVII. ex Numeris datis Log-i quærantur. Quanquam & illic compendium sese nobis offerat non contemnendum, quod quia in dicta Propos. intactum præteriit, breviter hic indicandum restat: Quoniam positis in Logarithmica (Fig. 6.) AB

$\propto a$,

∞a, fubtang. $AK \infty t$, $BI \infty u$, & $B\epsilon \infty s$, adeoque $RE \infty a - u$, & $\varrho\epsilon \infty a + s$, invenitur per XLVII, AR (Log-us RE) ∞t in $\overline{\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} + \&c.}$ & $A\varrho$ (Log-us $\varrho\epsilon$) ∞t in $\overline{\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \&c.}$ fequitur ex natura Log-micæ, has duas feries inter fe æquari, fi tres applicatæ RE, AB, $\varrho\epsilon$, feu, $a-u$, a & $a+s$ continuè proportionentur, h. e. fi ftatuatur $u \infty \frac{as}{a+s}$; fed quia per hanc hypothefin perpetuo fit $u < s$, & nominatim hac fumta ∞a, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, &c. illa fit $\infty \frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{4}a$, &c. multò femper celerius prior feries converget pofteriore: unde plurimum laboris in practica effectione log-orum refcindi poterit, fi loco hujus illa furrogetur, ex. gr. fi (facta $s \infty a$) loco feriei $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} -$ &c. hoc eft, loco $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} +$ &c. fubftituatur $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} +$ &c. quippe per cujus primos 18. terminos tantundem approximatur, quantum per mille terminos alterius; quod ipfum etiam ad Coroll. 3. XLVII. in fubtangente Log-micæ definienda obfervabitur. Sed rei utiliffimæ uberiorem explicationem anguftia paginæ non permittit.

Schol. Si fumma quædam pecuniæ fœnori elocata fit, ea lege, ut fingulis momentis pars proportionalis ufuræ annuæ in fortem computetur; exponatur autem ipfa fors per BC feu 1, tempus annuum per BI feu x divifum in punctis E, F, G, &c. in momenta innumera æqualia, atque ufura annua per $\frac{x}{s}$; inventa feries $1 + \frac{x}{s} + \frac{xx}{1.2ss} + \frac{x^3}{1.2.3s^3} +$ &c. hoc eft, (explicata forte 1 per a, & ufura $\frac{x}{s}$ per b) $a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2.3aa} + \frac{b^4}{2.3.4a^3} +$ &c. indicabit valorem ejus, quod finito anno debebitur. Cum enim, ut tempus annuum BI ad primum ejus momentum BE, feu ut x ad d, ita fe habeat ufura annua $\frac{x}{s}$ ad partem proportionalem ufuræ, erit hæc $\frac{d}{s}$, figni-

significabitque $1+\frac{d}{t}$ seu applicata *EK* sortem dicta parte proportionali usuræ auctam: unde sors aucta *EK* secundo momento pariet *FL*, & hæc pariter tertio momento pariet *GM*, & sic porrò, propter *BC*, *EK*, *FL*, *GM*, &c. $\div\!\div$. Quare postrema applicata *IO*, quam series inventa exprimit, denotabit valorem ejus, quod creditori elapso toto anno debetur. Conf. Act. Lips. 1690. p. 222.

LX. *Invenire aream spatii comprehensi à Curva genitrice Elasticæ, seu quæ evolutione sui Elasticam describit.* Fig. 7.

Describatur Elastica *AQR* ex evolutione Curvæ *MNT*, & sit filum evolvens *QN* (*DG*), quod productum secet axem in *V*; ponaturque, ut supra, $RZ \propto a$, $PQ \propto x$, $AP \propto y$. Quoniam ex Act. Lips. 1694. p. 273. manifestum est, quòd $QN \propto \frac{1}{2}\,QV$, erit & $NH \propto \frac{1}{2}\,PQ \propto \frac{1}{2}x$, & $NS \propto \frac{1}{2}\,FQ \propto \frac{1}{2}\,dx$; ac proinde ob ang. rect. DQN, $DF.FQ$ (:: $dy.dx$ :: [ex natura Elasticæ] $xx.\sqrt{a^4-x^4}$) :: $\frac{1}{2}\,dx\,(NS).\ \frac{dx\sqrt{a^4-x^4}}{2xx} \propto SG$ vel HI. Quare HI in NH seu $\sqsubset NI \propto \frac{xdx\sqrt{a^4-x^4}}{4xx} \propto \frac{\overline{a^4x-x^5},dx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}} \propto \frac{a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}} - \frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}} \propto$ Elemento spatii *MNHZ*, de cujus summatione jam agitur. Posterioris membri $\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}}$ integrale pertinens ad partem curvæ *RQ* vel *MN* est $\frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$. Prius autem $\frac{a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}$ cum absolutè summari nequeat, sublata irrationalitate in seriem convertetur, ut sequitur.

Ponatur $\sqrt{a^4-x^4} \propto \frac{txx}{a} - aa$, fiet $xx \propto \frac{2a^3t}{aa+tt}$, & differentiando $-xdx \propto \frac{\overline{a^3tt-a^5},dt}{Q:aa+tt}$; nec non $\frac{txx}{a} - aa\ (\sqrt{a^4-x^4}) \propto \frac{aatt-a^4}{aa+tt}$, & denique $\frac{-a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}} \propto \frac{aadt}{8t}$. Jam quia existente maxima $x \propto a$, ipsa quoque $t \propto a$, & illa decrescente crescit hæc, statuatur

statuatur $t \infty a + s$, ut sit $\frac{aadt}{8t} \infty \frac{aads}{8a+8s} \infty \frac{aa}{8}$ in $\frac{ds}{a+s} \infty \frac{aa}{8}$ in $\overline{\frac{ds}{a} - \frac{sds}{aa} + \frac{ssds}{a^3} - \frac{s^3ds}{a^4} + \&c.}$ per XXXVII: unde facta summatione habetur $S\frac{aadt}{8t}$ ($\infty\ S\frac{a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}$, dissimulato nempe signo —, quod hic nota tantum est respectivi decrementi ipsarum x) $\infty \frac{aa}{8}$ in $\overline{\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \&c.}$ demtoque $S\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}} \infty \frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$, resultat $S\frac{a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}} - S\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}} \infty \frac{aa}{8}$ in $\overline{\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \&c.} - \frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$ spatio nempe quæsito *MNHZ*. Et quia, sumta $u \infty \frac{as}{a+s}$, series $\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} -$ &c. æquatur seriei $\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} + \&c.$ per Annot. præc. Propos. idcirco dictum spatium *MNHZ* quoque sic exprimetur, $\frac{aa}{8}$ in $\overline{\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} + \&c.} - \frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$.

Nota, si statuantur $aa \infty 8$, & $s \infty a$, adeoque $t\ (a+s) \infty 2a$; & x $\left(\sqrt{\frac{2a^3s}{aa+ss}}\right) \infty 2a\sqrt{\frac{1}{5}}$, & u $\left(\frac{as}{a+s}\right) \infty \frac{1}{2}a$: hoc est, si constructo super *MZ*, semisse ipsius *RZ*, semicirculo inscribatur Triangulum Isosceles *MCZ*, cujus crus *MC* unitatem designet, atque Curvæ *MNT* applicetur *NH* $(\frac{1}{2}x) \infty \sqrt{\frac{8}{5}}$, prædictum spatium *MNHZ* fiet $\infty 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c. - \frac{2}{5}$. vel etiam $\infty \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} + \&c. - \frac{2}{5}$. Conf. Act. Lips. 1694. p. 273.

Coroll. 1. Quoniam ex iis, quæ loc. modo cit. Actorum docuimus, colligi potest, quod $QV \infty \frac{aa}{x}$, & $QN \infty \frac{1}{2}\ QV \infty \frac{aa}{2x}$, &

DQ seu $dz \propto \frac{aadx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$; sequitur, triangulum QGD (QD in $\frac{1}{2}QN$) $\propto \frac{a^4 dx}{4x\sqrt{a^4 - x^4}}$, & per consequens omnia triangula QGD seu spatium $RMNQR \propto S\frac{a^4 dx}{4x\sqrt{a^4 - x^4}} \propto$ (ut ostensum) spatio $MNHZ + S\frac{x^3 dx}{4\sqrt{a^4 - x^4}}$: unde cum $S\frac{x^3 dx}{4\sqrt{a^4 - x^4}}$ seu $\frac{1}{8}\sqrt{a^4 - x^4}$ exprimat quadrantem spatii Elastici $PQRZ$ (ut per se liquet), concludimus, spatium $RMNQR$ excedere aream $MNHZ$ quarta parte ipsius $PQRZ$.

Coroll. 2. Quia differentiale $\frac{aadt}{8t}$, ad quod reduximus elementum spatii $MNHZ$ vel $RMNQR$, elementum quoque denotat spatii hyperbolici inter asymptotas, cujus abscissa à centro est $\propto t$, ipsa vero t in assumta hypothesi $\sqrt{a^4 - x^4} \propto \frac{txx}{a} - aa$ propter x decrescentem ad nihilum excrescat in infinitum, & spatium hyperbolicum in infinitum protensum sit infinitum; idcirco & spatium totum interminatum genitricis Elasticæ $MNTXZ$ seu $NTXH$ infinitum erit. Vid. Act. Lips. loc. cit.

Ut non-finitam Seriem finita coërcet,
Summula, & in nullo limite limes adest:
Sic modico immensi vestigia Numinis hærent
Corpore, & angusto limite limes abest.
Cernere in immenso parvum, dic, quanta voluptas!
In parvo immensum cernere, quanta, Deum!

LETTRE